11. MATEMATICKÉ DŮKAZY

základní typy důkazů (přímý, nepřímý, spor), důkaz matematickou indukcí

1. Dokažte přímým, nepřímým důkazem a sporem, že pro každé přirozené číslo n platí:
a) $3|n \Rightarrow 6|(n^2-n)$
b) $2\nmid n^3 \Rightarrow 4\nmid n$
c) $3|(n-1) \Rightarrow 9|(n^2+4n-5)$

2. Přímým důkazem dokažte, že v každém trojúhelníku je součet všech jeho vnitřních úhlů roven 180°.

3. Dokažte sporem, že pro všechna přirozená čísla n platí: jestliže je číslo n^2 sudé, je sudé i číslo n.

4. Dokažte přímo nerovnost: $\sqrt{10-\sqrt{11}}<\sqrt{10+\sqrt{11}}-1$

5. Dokažte sporem nerovnost: $1+\sqrt{15-\sqrt{15}}<\sqrt{15+\sqrt{15}}$

6. Dokažte matematickou indukcí, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí:
a) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$
b) $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$
c) $6|(n^3+11n)$
d) $6|(n^3+5n)$

7. Dokažte, že funkce:
a) $f_1:=2x-1$ je rostoucí v $\mathbb{R}$
b) $f_2:=-3x+6$ je klesající v $\mathbb{R}$

8. Určete, pro která $x\in\mathbb{R}$ jsou definovány uvedené rovnosti, a pak je dokažte:
a) $\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x \, . \cos x}=2$
b) $\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2 x$
c) $\frac{1}{\sin^2 x}=1+cotg^2 x$
d) $\frac{1}{\cos x}-\sin x \, . \, tg\, x=\cos x$
e) $\frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}=cotg\, x$
f) $\frac{\sin 2x}{\cos 2x-\cos^2 x}=-2\, cotg\, x$
g) $\sin 75°=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
h) $\cos 105°=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

9. Dokažte, že platí následující rovnosti:
a) $\sqrt{5.\sqrt[3]{\frac{1}{5}}.\sqrt[4]{5}}=5^{\frac{11}{24}}$
b) $\frac{\sqrt[3]{a.\sqrt{a^3}}}{\sqrt{a.\sqrt[3]{a^2}}}=1$ pro $a>0$

10. Dokažte, že dané vektory *u, v* jsou navzájem kolmé:
a) $u = (2;4)$
$v = \left(-3;\frac{3}{2}\right)$
b) $u = (4;-1;13)$
$v = (5;-6;-2)$

11. Dokažte, že dané přímky:
a) $p=\{[1+2t;2-3t]\,t\in\mathbb{R}\}$
$q=\{[17+4k;-6-2k]\,t\in\mathbb{R}\}$ jsou různoběžné

b) $p = \{[2t; 3-t; 4-t] | t \in \mathbb{R}\}$
$q = \{[2-k; -1+k; 6+2k] | t \in \mathbb{R}\}$ jsou mimoběžné

12. Dokažte, že body $A[2;4;15]$ $B[0;-1;-6]$ $C[-1;2;0]$ určují rovinu a napište její parametrické vyjádření.

13. Dokažte, že daná rovnice:

a) $y^2 - 4x + 4 = 0$ vyjadřuje parabolu
b) $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ vyjadřuje kružnici
c) $x^2 - 2y^2 + 4x + 12y - 23 = 0$ vyjadřuje hyperbolu
d) $2x^2 + 3y^2 + 12x - 6y + 9 = 0$ vyjadřuje elipsu

14. Dokažte, že platí rovnosti v $\mathbb{C}$:

a) $\frac{2+i}{i} + \frac{i}{i+1} - \frac{2i+1}{i-1} = 1 - 6i$

b) $\left|\frac{4-2i}{3+i}\right| = \sqrt{2}$

15. Dokažte platnosti následujících rovností pro $n \in \mathbb{N}$:

a) $\frac{n}{(n-3)!} - \frac{1}{(n-4)!} = \frac{3}{(n-3)!}$, $n \geq 4$

b) $\frac{(n+5)!}{(n+3)!} - 2.\frac{(n+4)!}{(n+2)!} + \frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 2$

16. Dokažte následující limity:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 3x^2 + 2x} = -\frac{5}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = 2$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 + x - 2} = 3$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x.\sin x} = 2$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2^{x+3} + 4}{2^{x-1} + 1} = 16$

17. Dokažte, že funkce $y = \frac{2x+3}{x-6}$ nemá ve svém definičním oboru extrém.

18. Užitím l´Hospitalova pravidla dokažte následující limity:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \frac{5}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^3 - 4x^2 + x}{4x^3 + x} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi} = 0$

19. Dokažte správnost následujících integrálů:

a) $\int (x^3 + x^2 - 2x)\, dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C$

a) $\int (x^2 + 4x)^2 dx = \frac{1}{5}x^5 + 2x^4 + \frac{16}{3}x^3 + C$

b) $\int \sin^5 x\, dx = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$

c) $\int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + C$