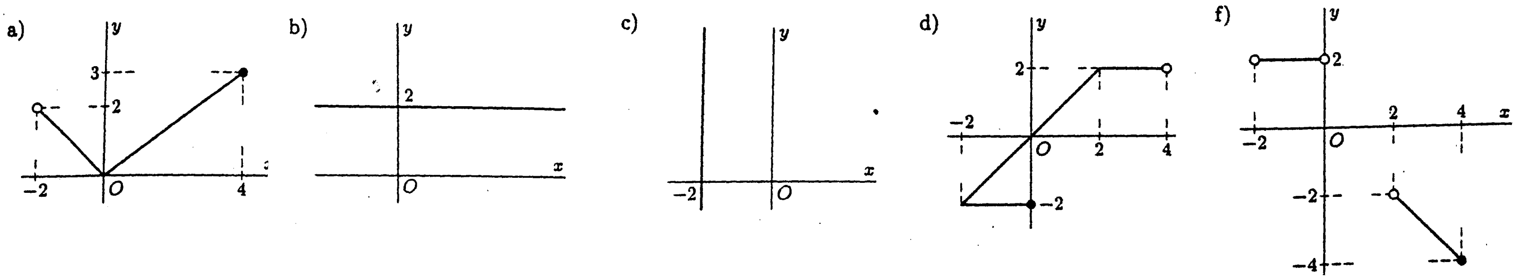
4. FUNKCE, JEJICH VLASTNOSTI A GRAFY

definice funkce, definiční obor a obor hodnot, vlastnosti (parita - sudá a lichá funkce, monotonie - rostoucí a klesající funkce, omezenost funkce, prostá funkce, inverzní funkce), limita a spojitost funkce, derivace funkce a jejich využití pro průběh funkce (tečna a asymptoty grafu funkce)

1. Rozhodněte, který z grafů na obrázku je grafem funkce. U funkcí určete jejich definiční obory a obory hodnot.



2. Určete definiční obory uvedených funkcí:

a) $f_1(x)=\sqrt{\dfrac{x-20}{2-x}}$ b) $f_2(x)=\dfrac{2x-1}{2x^2-2x+1}$

c) $f_3(x)=\sqrt{1-|x|}$ d) $f_4(x)=\dfrac{5x+8}{x^2-3x+2}$

e) $f_5(x)=\dfrac{x}{\sqrt{(5-x)(x-3)}}$ f) $f_6(x)=\log(-x)-\dfrac{1}{x+5}$

g) $f_7(x)=\sqrt{\log_5 x+1}$ h) $f_8(x)=\dfrac{3}{4-\ln x}$

i) $f_9(x)=\dfrac{5-\sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}$ j) $f_{10}(x)=\sqrt{3-x^2}+\sqrt{1-x}$

3. Dokažte, že funkce $f_1(x)=2x-1$ je rostoucí v $\mathbb{R}$.

4. Dokažte, že funkce $f_2(x)=-3x+6$ je klesající v $\mathbb{R}$.

5. Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou prosté ve svém definičním oboru:

a) $f_1(x)=2x+5$ b) $f_2(x)=x^2-4$

c) $f_3(x)=2^x$ d) $f_4(x)=|x+1|$

6. Které z funkcí jsou sudé (liché) v definičním oboru?

a) $f_1(x)=|x|$ b) $f_2(x)=\dfrac{4x}{x^2-4}$

c) $f_3(x)=\dfrac{x^2}{|x|+3}$ d) $f_4(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+1}$

7. Dokažte, že funkce $f(x)=\dfrac{10}{x^2+2}$ je omezená v definičním oboru.

8. Rozhodněte, ke kterým z daných funkcí existují funkce inverzní v definičním oboru, své tvrzení zdůvodněte a grafy funkcí načrtněte.

a) $f_1(x)=2x-1$ b) $f_2(x)=x^2-2x$

c) $f_3(x)=3^x$ d) $f_4(x)=\log_2 x+1$

e) $f_5(x)=2^{x-1}-4$

f) $f_6(x)=|x+2|$

9. Vypočítejte limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x^3+8}$

c) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{5x+6-x^2}{7x-6-x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-5\sin x+2}$

e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

g) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^4-x^3+4}{5x^4+x^2+2}$

h) $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}}$

i) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$

j) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2^{x+3}+4}{2^{x-1}+1}$

k) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}$

l) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-cotg\, x}$

m) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

n) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(2x-3)^5.(3x+25)^{25}}{(2x+1)^{30}}$

o) $\lim\limits_{x\to 0} x.cotg\, x$

p) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1}$

10. Vypočítejte derivace následujících funkcí a určete jejich definiční obory:

a) $f_1(x)=x.\sin x$

b) $f_2(x)=\sin x.tg\, x$

c) $f_3(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$

d) $f_4(x)=\dfrac{x^2+2x}{1-x^2}$

e) $f_5(x)=(x^2+1)^6$

f) $f_6(x)=\sqrt{4x^3-x}$

g) $f_7(x)=\cos(2x+4)$

h) $f_8(x)=\ln(2x+4)$

i) $f_9(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

j) $f_{10}(x)=\dfrac{x^2.\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

k) $f_{11}(x)=\sin\dfrac{1}{2}x+\cos\dfrac{1}{2}x$

l) $f_{12}(x)=e^{x^2-3x}$

11. Je dána funkce $f: y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x;$ pro která $x\in\mathbb{R}$ platí $f'(x)=0$?

12. Je dána funkce $f: y=\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x};$ vypočítejte derivaci dané funkce v libovolném bodě $x\in\mathbb{R}$.

13. Napište rovnici tečny ke grafu funkce $y=f(x)$ v bodě *T*. Rovnici tečny uveďte v obecném tvaru:

a) $f_1(x)=x^2-2x, T[4; y_0]$

b) $f_2(x)=\dfrac{1}{x^2}, T\left[\dfrac{1}{2}; y_0\right]$

c) $f_1(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}, T[-2; y_0]$

d) $f_4(x)=e^x-e^{-x}, T[0; y_0]$

14. Jaký úhel s osou *x* svírá tečna grafu funkce $f: y=2x^3-x$ v průsečíku tohoto grafu s osou *y* ?

15. Užitím derivace určete intervaly monotónnosti následujících funkcí:

a) $f_1(x)=x+\dfrac{1}{x}$ b) $f_2(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f_3(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x}$ d) $f_4(x)=(x^2-1)^4$

e) $f_5(x)=3x^4-4x^3$ f) $f_6(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

g) $f_7(x)=\cos^2 x+5\cos x$ v intervalu $\langle 0;2\pi\rangle$

16. Najděte lokální extrémy funkcí:

a) $f_1(x)=\dfrac{x^2}{x+3}$ b) $f_2(x)=\dfrac{-2}{x^2+4}$

c) $f_3(x)=\sqrt{x}+\dfrac{4}{x}$ d) $f_4(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$

e) $f_5(x)=-x^4-2x^2+3$ f) $f_6(x)=x^3+2x-18$

17. Určete inflexní body a asymptoty funkce:

a) $f_1(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ b) $f_2(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

c) $f_3(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$

18. Určete intervaly konvexní a konkávní funkce:

a) $f_1(x)=\dfrac{e^x}{x}$ b) $f_2(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

c) $f_3(x)=\dfrac{4x}{1+x^2}$

19. Vyšetřete průběh funkce:

a) $f_1(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ b) $f_2(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

c) $f_3(x)=\dfrac{9(x+1)}{x^2}$ d) $f_4(x)=2x^2-\ln x$

e) $f_5(x)=e^{-x^2}$ f) $f_6(x)=\dfrac{x+2}{x^2}$

20. Užitím l´Hospitalova pravidla vypočítejte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3-4x^2+x}{4x^3+x}$ d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^4+x^3+x-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$