10. LOGARITMICKÁ A EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE, ROVNICE A NEROVNICE

definice, vlastnosti a graf logaritmické a exponenciální funkce, vztah mezi logaritmickou a exponenciální funkcí, logaritmus, pravidla pro počítání s logaritmy, metody řešení logaritmických a exponenciálních rovnic a nerovnic

1. Načrtněte grafy funkcí a určete definiční obor a obor hodnot funkce, průsečíky grafu s osou x a s osou y:

a) $y=\log_2(x+4)$
b) $y=\log_2(x+4)-1$
c) $y=|\log_2(x+4)-1|$
d) $y=|\log_2(x+4)|-1$
e) $y=\log_2|x+4|-1$
f) $y=\log_2(|x|+4)-1$
g) $y=2^x-4$
h) $y=2^{x+1}-4$
i) $y=-(2^{x+1}-4)$
j) $y=|2^{x+1}-4|$
k) $y=2^{|x+1|}-4$
l) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-1$

2. Určete definiční obory funkcí:

a) $y=\log_3(x+6)$
b) $y=\log(x^2-4)$
c) $y=\dfrac{1}{\log x-1}$
d) $y=\dfrac{1}{\log_2(x+7)-1}$
e) $y=\log(|x+1|-7)$
f) $y=\sqrt{\log(x+3)}$
g) $y=\log\dfrac{x}{2x-1}$
h) $y=\sqrt{\log_{0,2}\dfrac{x+5}{x}}$

3. Rozhodněte, jaký vztah platí mezi čísly p a r, jestliže platí:

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^p<\left(\frac{3}{7}\right)^r$
b) $\left(\frac{8}{5}\right)^p<\left(\frac{8}{5}\right)^r$
c) $\left(\frac{3}{4}\right)^p<\left(\frac{3}{4}\right)^r$
d) $\left(\frac{4}{3}\right)^p>\left(\frac{4}{3}\right)^r$
e) $\left(\frac{3}{7}\right)^p>\left(\frac{3}{7}\right)^r$
f) $\left(\frac{3}{4}\right)^p=\left(\frac{3}{4}\right)^r$

4. Vypočítejte:

a) $\log_4 16^{-0,5}$
b) $\log_{10}1500-\log_{10}15$
c) $\log_2 8-\log_2 2+\log_2 32$
d) $4\log_6 3+5\log_6 2-\log_6 12$
e) $2\log_5 25+3\log_2 64+\log_3\dfrac{1}{9}$
f) $(\log 0,1+3\log\sqrt{10}).\log 100$
g) $\log_5\dfrac{1}{25}-(\log_{\frac{1}{3}}9)^2+\log_{\frac{1}{2}}4^2$

5. Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí:

a) $\log_{1,5}x<\log_{1,5}5$
b) $\log_{0,7}(x+1)\leq\log_{0,7}\dfrac{1}{3}$

6. Řešte exponenciální rovnice s neznámou $x\in\mathbb{R}$:

a) $2^{3x-1}.4=8^{x+1}.\left(\frac{1}{2}\right)^x$
b) $0,25.\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}=1$

c) $5^x . 2^x = 100^{x-1}$

d) $\frac{81}{16} = \left(\frac{2}{3}\right)^x . \left(\frac{9}{4}\right)^{x+1}$

e) $3^x + 3^{x+1} = 108$

f) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^{x+3} = \frac{21}{8}$

g) $7 . 4^{-x+2} = 3 . 4^{-x+3} - 5$

h) $4^{2x} - 6 . 4^x + 8 = 0$

i) $\frac{1}{4} . 2^x + \frac{1}{2} . 4^x = 9$

j) $3^x + 3^{x+1} = 7 . 4^x - 4^{x+1}$

k) $2^{x-1} - 2^{x-2} = 5^{x-3} + 2^{x-3}$

l) $5^{x-1} = 10^x . 2^{-x} . 5^{x+1}$

m) $4 . 3^{x+1} - 72 = 3^{x+2} + 3^{x-1}$

7. Řešte logaritmické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $\log_2(x+1) = 3$

b) $4 \log_3(2x-1) = 12$

c) $\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}} x = 0$

d) $\log_{\frac{1}{2}} \log_3(1 + 20 \log_2 x) = -2$

e) $\log_5(x^2 + 2x) = \log_5(-3x)$

f) $\log x = 2 \log 5 + \log 4$

g) $\frac{\log_3 x}{1 + \log_3 2} = 2$

h) $\log_6(x+1) + \log_6 x = 1$

i) $\log_2(x+7) - \log_2 x = 3$

j) $\log_8 \sqrt{x+30} + \log_8 \sqrt{x} = 1$

k) $\log_4(3x+2) - 2 \log_4 x = 2 - \log_4 8$

l) $\log_2^2 x + 2 \log_2 x - 3 = 0$

m) $x^{\log x} = 100x$

n) $x^{\log x + 2} = 100x$

o) $1000 x^2 = x^{\log x}$

p) $x^{\log_7 x^2} = 49 x^3$

q) $\log_2(x^2 + 4x + 3) = 3$

r) $\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = 2 - \log_4 8$

s) $3 \log 2 - \log(x-1) = \log(x+1) - \log(x-2)$

t) $2 \log 3x^2 + 3 \log 4x^3 = 4 \log 2x^2 + 4 \log 6x$

u) $\log_3[1 + \log_3(2^x - 7)] = 1$

8. Řešte exponenciální nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $3^{x-5} < 0$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+2} \geq 0$

c) $3^{x-1} > 9$

d) $4^x . 2^x \leq 100$

e) $3^{x+4} \geq 3^{2x-1}$

f) $\left(\frac{1}{6}\right)^{x^2} < \left(\frac{1}{6}\right)^{2x+8}$

g) $2^x . 2^{x+1} < 2^{x+3}$

h) $3^{x+1} + 3^{x+2} < 36$

i) $2^x - 3^x > 2^{x+2} - 3^{x+1}$

j) $25^x - 9 . 5^x + 20 < 0$

k) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leq 9$

9. Řešte logaritmické nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $\log_5(x^2 - 2x + 1) \geq 0$

b) $\log_{\frac{4}{7}}(4x^2 + 3x) > 0$

c) $\log_{0,3} \frac{x+7}{2-x} \geq 0$

d) $\log_3(2x-1) > \log_3(4x+3)$

e) $\log_{0,2}(x-3) > \log_{0,2} x - \log_{0,2} 2$

f) $\log_{\frac{1}{3}}(x+4) - \log_{\frac{1}{3}}(5x-4) \leq 0$

g) $\log_8(x^2 - 4x + 3) < 1$

h) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + 4) > -2$

i) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + \log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geq -2$

j) $\log(x+2) < 2 - \log(2x-6)$