

2. ALGEBRAICKÉ ROVNICE A NEROVNICE

ekvivalentní úpravy, vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice, iracionální rovnice a nutnost zkoušky, rovnice v množině komplexních čísel, binomická rovnice, rovnice s kombinačními čísly a faktoriály, soustavy rovnic, lineární a kvadratické nerovnice, grafické řešení lineárních nerovnic, znázorňování čísel v Gaussově rovině, definiční obory výrazů, nerovnice s kombinačními čísly a faktoriály, soustavy lineárních nerovnic

1. Užitím vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice řešte úlohy:

a) Sestavte kvadratickou rovnici o kořenech, jejichž součet je -1 a jejichž převrácené hodnoty mají součet $\frac{1}{2}$.

b) Sestavte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou rovny druhým mocninám kořenů rovnice $3x^2 - 15x + 2 = 0$, aniž tuto rovnici řešíte.

c) Sestavte kvadratickou rovnici, která má kořeny převrácené hodnoty kořenů rovnice $6x^2 - 13x + 6 = 0$, aniž tuto rovnici řešíte.

d) V rovnici $ax^2 - 8x + 4 = 0$ určete a tak, aby jedním kořenem bylo číslo $\frac{2}{3}$.

e) Rovnice $x^2 + ix + q = 0$ má jeden kořen $x_1 = 2 - i$. Určete druhý kořen a koeficient $q \in \mathbb{C}$.

f) Rovnice $x^2 + px + 21 = 0$ má jeden kořen $x_1 = -3 + 2i\sqrt{3}$. Určete druhý kořen a koeficient $p \in \mathbb{C}$.

2. Řešte rovnice v daných množinách:

a) $2(x+3) - 3\left(\frac{1}{4}x + 2\right) = \frac{x+11}{8}$ v intervalu $(-3; 1)$

b) $\frac{5x-11}{2} - \frac{5x+3}{5} = \frac{50-22x}{10}; x \in \mathbb{N}$

c) $x\sqrt{5} - 1 = x + 2; x \in \mathbb{R}$

3. Řešte v \mathbb{R} následující rovnice:

a) $\frac{2x-5}{3x-4} - \frac{4x-5}{6x-1} = 0$

b) $\frac{1}{x-2} - \frac{x-3}{x+4} = \frac{6}{x^2+2x-8} - 1$

c) $\frac{x+3}{x+1} + \frac{x+2}{x-3} = 2 + \frac{7x-1}{x^2-2x-3}$

d) $\frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{4}x + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{5}{6}x - \frac{7}{6}}{1\frac{1}{4}x + 1\frac{5}{4}}$

e) $x + \frac{1}{x+1} = 1 + \frac{x}{x+1}$

f) $\frac{x+\sqrt{2}}{x} - \frac{x}{x+\sqrt{2}} = 2$

g) $x^2 + 15x = 216$

h) $5x^2 - 18x - 8 = 0$

i) $\frac{1}{x+4} - \frac{4}{x-4} + \frac{x^2-20}{x^2-16} = 0$

j) $\frac{18x+7}{x^3-1} = \frac{30}{x^2-1} - \frac{13}{x^2+x+1}$

4. Řešte v \mathbb{R} rovnice:

a) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$

b) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$

c) $\sqrt{4x+8} - \sqrt{3x-2} = 2$

d) $4\sqrt{8-x} - \sqrt{6x+150} = 0$

e) $\sqrt{7-2\sqrt{x}} = \sqrt{18-13\sqrt{x}}$

f) $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{4x-7}$

g) $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x-7} = 2\sqrt{x}$

h) $\sqrt{1+4x-x^2} = x-1$

i) $x - \sqrt{x^2-11} = 1$

5. Řešte kvadratické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$:

a) $3x^2 - 2x + 1 = 0$

b) $x^2 - 4ix - 8 = 0$

c) $x^2 - 6ix - 9 = 0$

d) $x^2 + x(2-i) + 3-i = 0$

6. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$ a výsledek zapište v algebraickém tvaru:

a) $x^3 - 1 = 0$

b) $x^3 + 8 = 0$

c) $x^4 + 1 = 0$

d) $x^6 - 64 = 0$

e) $x^2 - i = 0$

f) $x^2 - 2 - 2i\sqrt{3} = 0$

7. Řešte rovnice s neznámou $n \in \mathbb{Z}$:

a) $\frac{n!}{(n-2)!} = 4n$

b) $\frac{10-17n}{(n+1)!} + \frac{4}{(n-1)!} = 0$

c) $\frac{(n+6)!}{(n+4)!} - n \cdot \frac{(n-4)!}{(n-5)!} = 5n + 80$

d) $\frac{(n-3)! + (n-1)!}{(n-2)!} = 3$

e) $\frac{(n-4)! + (n-2)!}{(n-3)!} = 3$

f) $\frac{(n+6)!}{(n+4)!} + n^2 - 16n = 28$

g) $\frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} = 4$

8. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $\binom{10}{4}x = \binom{12}{6}$

b) $\binom{x-2}{2} = 3$

c) $\binom{x}{2} + \binom{x+3}{1} = 4$

d) $\binom{x-1}{x-2} + \binom{x-2}{x-4} = 4$

e) $\binom{x-1}{x-3} + \binom{x-2}{x-4} = 9$

f) $\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \frac{x^2+1}{2}$

g) $\binom{10}{1} \binom{x}{x-2} - \binom{x+3}{x+1} = 15 \binom{x}{0}$

h) $\binom{x-1}{x-3} - 2 \cdot \binom{x-2}{x-4} = 0$

9. Řešte v \mathbb{R}^2 , popř. \mathbb{R}^3 soustavy rovnic:

a) $\frac{2x+1}{5} - \frac{3y+2}{7} = 2y-x$

b) $(x+1)^2 + (y+1)^2 + 10 = x(x+6) + y(y+6)$

a) $\frac{3x-1}{4} + \frac{7y+2}{6} = 2x-y$

b) $(x+1)^2 - (y+1)^2 + 8 = x(x-6) - y(y-6)$

c) $\frac{2x-5}{x-4} - \frac{y+1}{y-2} = 1$

d) $x + 2y - 3z = -8$

c) $\frac{3x+1}{x-1} - \frac{2y+9}{y+2} = 1$

d) $-3x + y + 2z = 10$

$2x - 3y + 2z = 5$

e) $2x - 3y + 4z = 5$
 $3x + 4y - 2z = 0$
 $-4x + 2y + 3z = 8$

f) $x + y - z = 0$

f) $2x + y - z = 1$

$4x + 2y - 3z = 0$

g) $x^2 + y^2 - 4 = 0$
 $x + 2y = 4$

h) $5x^2 + 3y^2 = 192$
 $5x - 3y = -6$

i) $4x^2 - 9y^2 - 2x + 27y - 20 = 0$
 $3x + 5y - 8 = 0$

10. Řešte nerovnice v daných množinách:

- a) $2(x-1)-x > 3(x-1)-2x-5; x \in \mathbb{R}$ b) $\frac{2x-17}{4} - \frac{8-x}{2} - 2 \leq x-4 + \frac{x}{8}; x \in \mathbb{R}$
c) $\frac{3x-1}{4} - \frac{5-6x}{2} \leq 8 + \frac{3x}{2}; x \in \mathbb{N}$ d) $\frac{7x-1}{3} + 6 > 5x - \frac{5+3x}{2}; x \in \mathbb{N}$
e) $\frac{4x-3}{5} - \frac{3x-4}{2} + \frac{2x-5}{3} < 0; x \in \mathbb{Z}$ f) $\frac{2x-1}{3} - \frac{x+3}{2} < 3 - \frac{x-2}{3}; x \in \mathbb{N}_0$
g) $\frac{x+3}{2} - \frac{x-2}{3} - 5 < \frac{x-1}{2}; x \in \mathbb{R}^-$ h) $-x^2 + 4x - 4 < 0; x \in \mathbb{R}$
i) $x^2 - 4x + 5 > 0; x \in \mathbb{R}$ j) $x^2 - 6x + 8 > 0; x \in \mathbb{R}$
k) $\frac{x-2}{x-3} + \frac{15}{x^2-3x} = \frac{6}{x-3} - \frac{3}{2}; x \in \mathbb{N}$ l) $1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{x-1}; x \in \mathbb{Z}$
m) $\frac{2}{2x+3} - \frac{2}{3-2x} = \frac{4x^2-21}{4x^2-9}; x \in \mathbb{R}$ n) $\frac{1}{x+1} + \frac{4}{x^2-x+1} = \frac{3}{x^3+1}; x \in \mathbb{Z}$

11. Určete definiční obory výrazů:

- a) $\sqrt{\frac{-2}{x^2-5x+6}}$ b) $\sqrt{6x-x^2} + \sqrt{x-1}$
c) $\sqrt{-4x^2+4x+3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{6+7x-3x^2}}$

12. Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel z , pro která platí:

- a) $|z-2-i| > 4$ b) $|z-1-3i| \geq |z+2i|$
c) $|z+1-2i| \leq 3 \wedge |z+2-2i| > |z|$ d) $1 < |z-3i-2| \leq 4$
e) $|z-4-i| \leq |z+3i|$ f) $|z-3+2i| > |z+2|$
g) $|z+2| \geq \left| \frac{4-3i}{8+4i} \right|$

13. Řešte nerovnice s neznámou $n \in \mathbb{Z}$:

- a) $72n! < (n+2)!$ b) $(n+2)! \cdot (24+6n) \leq (n+4)!$
c) $(n+1)! + (n+2)! \leq (n+3)!$ d) $\frac{n!}{(n-2)!} + 24 \geq 10n$
e) $n - \frac{(n-2)!}{(n-4)!} \geq -1$ f) $\frac{n!}{(n-2)!} - 3n \leq \frac{(n+4)!}{(n+3)!} + 2$

14. Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

- a) $\binom{x-2}{x-4} x + 3 \geq 4x$ b) $\binom{x+1}{x} + 2x < 50$
c) $\binom{x+4}{2} \geq \binom{x-4}{2}$ d) $\binom{x+1}{x-1} - \binom{x}{x} \cdot \binom{8}{5} \leq 44$
e) $\binom{8}{x} < 2 \binom{8}{x-1}$ f) $\binom{7}{x+1} \leq \binom{7}{x} \cdot 2$

15. V množině \mathbb{R} řešte soustavy nerovnic:

- a) $2x+3 \leq x+1$
 $4x > 4-x$
c) $-2 < x+5 < 2$ b) $3x+1 > 0$
 $x-1 < 10$
d) $-3 \leq x-2 < 2x+1 < \frac{1}{2}x$

$$\frac{1}{3}x+1 < 3x$$

e) $5-2x \leq 4x-1$

$$2+x > \frac{-x-2}{4}$$

$$\frac{x-1}{4} + \frac{7-x}{2} > 3$$

f) $2x-3 - \frac{x^2+2}{3} \leq 2 - \frac{(3-x)^2}{3}$

16. Graficky řešte nerovnice:

a) $\frac{x+2}{2} > \frac{x-2}{3}$

b) $2x-3 \geq \frac{x+1}{2}$

c) $\frac{x-1}{2} > 2x - \frac{1}{4}$

17. Graficky znázorněte množinu všech řešení soustavy nerovnic:

a) $3x+2y \geq 6$
 $x+2y \leq 4$

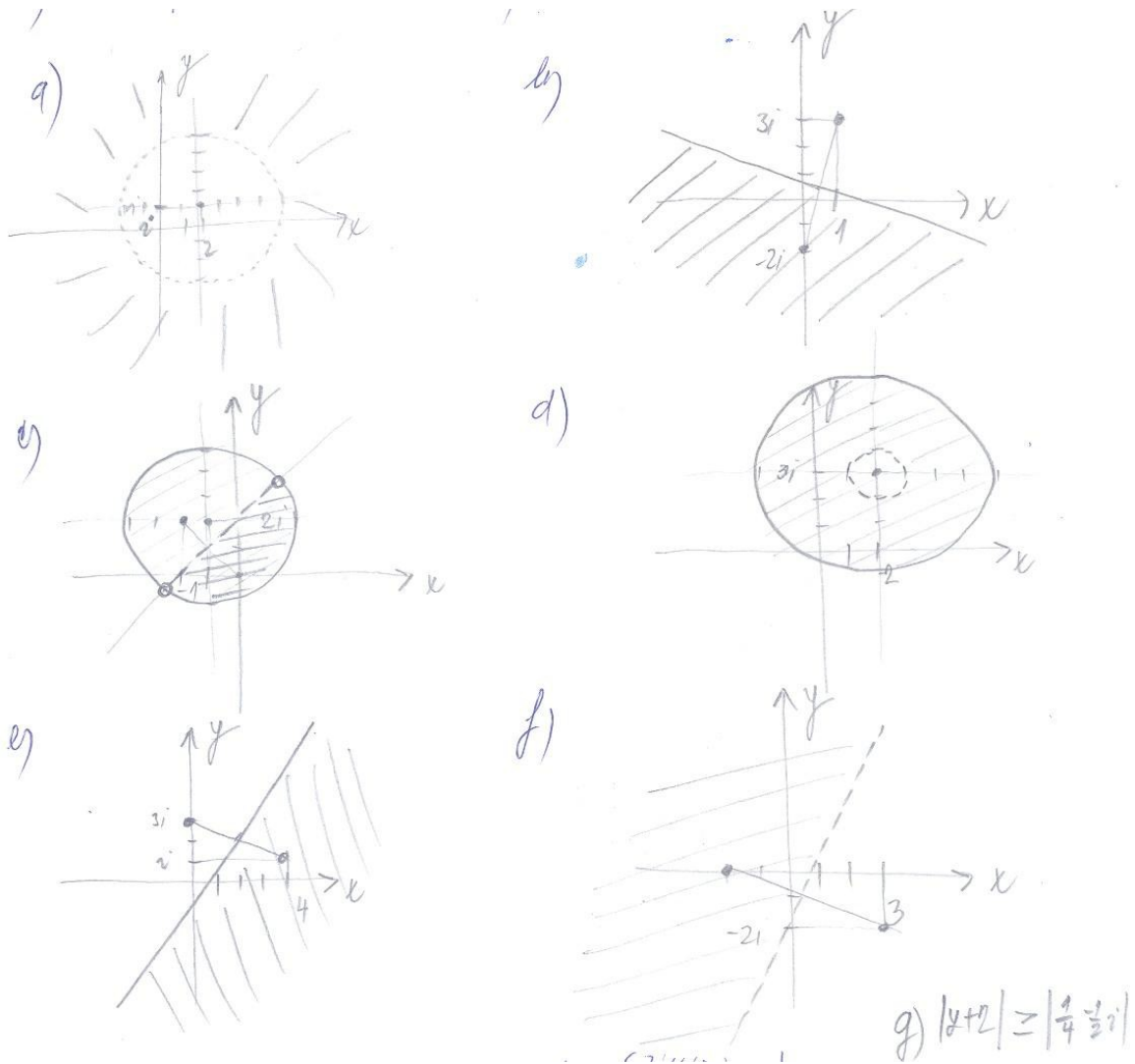
b) $3x+2y < 6$
 $-2x+y < 2$

c) $x-y < 2$
 $2x+y \leq 4$
 $x > -1$

d) $y \geq -2$
 $x-y \leq 1$
 $x+y > 2$
 $\frac{1}{3}x-y \geq 1$

11. a) $(2; 3)$ b) $\langle 1; 6 \rangle$ c) $\left\langle -\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle$ d) $\left(-\frac{2}{3}; 3\right)$

12. viz obrázek



13. a) $\{8; 9; 10; \dots\}$ b) $\{3; 4; 5; \dots\}$ c) $\{-1; 0; 1; \dots\}$
d) $\{2; 3; 8; 9; 10; \dots\}$ e) $\{4; 5\}$ f) $\{2; 3; 4; 5; 6\}$
14. a) $\{12; 13; \dots\}$ b) $\{0; 1; 2; \dots; 16\}$ c) $\{6; 7; 8; \dots\}$
d) $\{1; 2; 3; \dots; 13\}$ e) $\{4; 5; 6; 7; 8\}$ f) $\{2; 3; 4; 5; 6\}$