

## 21. SUBSTITUCE

význam substituce při řešení některých rovnic, kvadratická a bikvadratická rovnice, logaritmická, exponenciální a goniometrická rovnice, neurčitý integrál

1. Vhodnými substitucemi řešte rovnice:

- |  |  |
|--|--|
| a) $x^2 + 2x - 12 - 2\sqrt{x^2 + 2x + 12} = 0$   | b) $\sqrt{2x^2 + 5x} - \sqrt{2x^2 + 5x - 10} = \sqrt{2}$                                       |
| c) $\left(\frac{x^2+2}{x^2-4} - 3\right)\left(\frac{x^2+2}{x^2-4} + 4\right) + 10 = 0$ | d) $\sqrt{\frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{3}{x}} = 1 - \sqrt{\frac{3}{x}}$                          |
| e) $\sqrt{\frac{x+10}{x+2}} - 3\sqrt{\frac{x+2}{x+10}} = 2$                            | f) $x^4 - \frac{10}{3}x^2 + 1 = 0$   |
| g) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$   | h) $x^4 - 3(x^2 - 1) = 7(x^2 - 3)$   |
| i) $\frac{x^2-3}{3} = \frac{3}{x^2-3}$   | j) $\frac{3x}{2x-1} + 1 = 2 \cdot \frac{2x-1}{x}$  |
| k) $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$  | l) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$  |
| m) $\left(\frac{x-3}{x+2} - 5\right) \cdot \left(\frac{x-3}{x+2} + 3\right) - 9 = 0$   | n) $\left(\frac{x-2}{x+3} - 3\right) \cdot \left(\frac{x+3}{x-2} - 1\right) = \frac{2-x}{x+3}$ |
| o) $\left(\frac{x+10}{x+2}\right)^2 + 5\frac{x+10}{x+2} - 14 = 0$                      | p) $\left(\frac{x-1}{x+1} - 2\right)\left(\frac{x+1}{x-1} - 1\right) = \frac{1-x}{x+1}$        |

2. Vhodnými substitucemi řešte exponenciální rovnice:

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| a) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$       | b) $6^{x+1} + 6^{1-x} = 37$                            |
| c) $4^{2x+1} = 65 \cdot 4^{x-1} - 1$ | d) $3^{x+1} + 9^x = 108$                               |
| e) $49^x - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$      | f) $5^x - 5^{3-x} - 20 = 0$                            |
| g) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$         | h) $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$                           |
| i) $4^{2x+1} + 1 = 65 \cdot 4^{x-1}$ | j) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 - 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}} = 0$ |

3. Pomocí substituce řešte logaritmické rovnice:

- |  |   |
|--|---|
| a) $\log x + \frac{1}{\log x} = 2$                       | b) $1 + \log x^3 = \frac{10}{\log x}$     |
| c) $\log x^2 \cdot \log \sqrt{x} - \log \frac{1}{x} = 2$ | d) $\log x - (\log \sqrt[6]{x})^{-1} = 1$ |
| e) $x^{\log x - 2} = 1000$                               | f) $x^{\log_2 x} = 4x$                    |
| g) $x^{1+\log x} = 100$                                  | h) $\log_3^2 x - 3 \log_3 x - 10 = 0$     |
| i) $\frac{1}{5 - \log x} + \frac{2}{1 + \log x} = 1$     | j) $\log^2 x - 3 \log x = \log x^2 - 4$   |
| k) $\log_4 [\log_2 (\log_3 x)]$                          | l) $x^{\log x - 1} = 100$                 |

4. Řešte goniometrické rovnice:

- |  |   |
|--|---|
| a) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$         | b) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$   |
| c) $\cotg\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ | d) $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ |
| e) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | f) $\operatorname{tg}\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$                        |
| g) $\sin^2 x + 2 \sin x - 3 = 0$                               | h) $\sin^2 x + 5 \sin x + 4 = 0$  |
| i) $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$                                 | j) $3 \cos^2 x - 4 \cos x - \sin^2 x - 2 = 0$   |
| k) $2\sqrt{3} \sin^2 x = \cos x$                               | l) $2 \operatorname{tg} x + 4 \cotg x = 9$  |

5. Vypočítejte substituční metodou a proveďte zkoušku:

a)  $\int \sin^6 x \cdot \cos x \, dx$

b)  $\int 10x(x^2+13)^{12} \, dx$

c)  $\int 5x^2 \cdot e^{x^3} \, dx$

d)  $\int 2x\sqrt{x^2+1} \, dx$

e)  $\int \frac{\ln^2 x}{x} \, dx$

f)  $\int \frac{3x}{(x^2+4)^3} \, dx$

g)  $\int \frac{5x}{3x^2+1} \, dx$

h)  $\int \frac{1}{1+\sin x} \, dx$