

6. GONIOMETRICKÉ FUNKCE, ROVNICE A NEROVNICE

definice goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku, pomocí jednotkové kružnice, jejich vlastnosti a grafy, vztahy mezi goniometrickými funkcemi, řešení goniometrických rovnic a nerovnic, goniometrický tvar komplexního čísla, limity s goniometrickými funkcemi, výpočet neurčitého integrálu s goniometrickými funkcemi

1. Určete hodnoty goniometrických funkcí (bez použití kalkulačky):

a) $\sin\left(-\frac{31}{4}\pi\right)$ b) $\cotg\left(\frac{31}{4}\pi\right)$
c) $\cos\left(\frac{109}{6}\pi\right)$ d) $\tg\left(-\frac{109}{6}\pi\right)$

2. Určete hodnotu výrazu:

a) $\sin 225^\circ - \cos 240^\circ + \tg 300^\circ - \cotg 330^\circ$
b) $\frac{\sin\left(-\frac{17}{3}\pi\right) \cdot \tg \frac{9}{4}\pi}{\cos \frac{7}{6}\pi \cdot \cotg(-300^\circ)}$

3. Vypočítejte:

a) $\sin x, \tg x, \cotg x$, je-li $\cos x = -\frac{1}{8}, x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$
b) $\sin x, \cos x$, je-li $\tg \frac{x}{2} = \frac{2}{3}, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
c) $\sin x, \cos x, \cotg x$, je-li $\tg x = -\frac{5}{12}, x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

4. Zjednodušte následující výrazy:

a) $\frac{1 - \sin^2 x}{1 - \cos^2 x}$ b) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\sin x}{1 - \cos x}$
c) $\frac{\cos^2 2x - 1}{\sin^2 2x - 1}$

5. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ jsou definovány uvedené rovnosti, a pak je dokažte:

a) $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x \cdot \cos x} = 2$ b) $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tg^2 x$
c) $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cotg^2 x$ d) $\frac{1}{\cos x} - \sin x \cdot \tg x = \cos x$
e) $\frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} = \cotg x$ f) $\frac{\sin 2x}{\cos 2x - \cos^2 x} = -2 \cotg x$
g) $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ h) $\cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

6. Načrtněte grafy goniometrických funkcí:

a) $y = |\sin x|$ b) $y = |\sin x| - \frac{1}{2}$
c) $y = 1 - |\sin x|$ d) $y = |2 \sin x - 1|$
e) $y = \sin(-2x)$ f) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

g) $y = 3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

h) $y = 2 \sin x + 1$

i) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

j) $y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$

7. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

b) $\sin x + \cos 2x = 1$

c) $2 \sin x = \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x$

d) $2 \sin^2 x - 5 \cos x + 1 = 0$

e) $\sin x + \cos x = 0$

f) $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = 0$

g) $2\sqrt{3} \operatorname{cotg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -2$

h) $\frac{5 + \sin x}{1 - \sin x} = 3$

i) $4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0$

j) $3 \sin^2 x + \cos x + \cos^2 x = 0$

k) $\sin 2x + \cos x = 0$

l) $\sin x - \cos 2x = 0$

m) $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$

8. Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\operatorname{tg} x \leq -1$

c) $\sin x < 0$

d) $\operatorname{cotg} x > -1$

e) $0 \leq \cos x < \frac{1}{2}$

f) $|\sin x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\sin 2x \leq \frac{1}{2}$

h) $\cos \frac{x}{2} > 0$

9. Následující komplexní čísla vyjádřete v goniometrickém tvaru:

a) $z = 2$

b) $z = -2$

c) $z = 2i$

d) $z = 2 - 2i$

e) $z = -1 + i\sqrt{3}$

f) $z = -3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$

g) $z = 2\sqrt{3} + 2i$

10. Vypočítejte následující limity:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \cdot \sin x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \cdot \sin x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{cotg} x$

f) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{cotg} x}$

11. Vypočítejte následující integrály:

a) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$

b) $\int \operatorname{cotg}^2 x dx$

c) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx$

d) $\int \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) dx$

e) $\int \operatorname{tg} x dx$

f) $\int \sin^6 x \cdot \cos x dx$

12. Pomocí per partes vypočítejte následující integrály:

a) $\int \sin^2 x dx$

b) $\int \cos^2 x dx$

c) $\int e^x \cdot \cos x dx$

d) $\int x^2 \cdot \sin x dx$

e) $\int \ln^2 x \, dx$

g) $\int x^3 \cdot \ln x \, dx$

f) $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

h) $\int x \cdot e^{3x} \, dx$