

8. KOMBINATORIKA

základní kombinatorické pojmy (variace, permutace, kombinace bez opakování a s opakováním), rovnice a nerovnice s kombinačními čísly a faktoriály, kombinatorické výrazy

1. Kolik je pěticiferných, čtyřciferných a trojciferných čísel s různými ciframi, jestliže tato čísla neobsahují cifry 0, 1, 3, 4, 6?
2. Kolik přirozených čísel menších než 5000 je možné vytvořit z číslic 0, 3, 4, 5, jestliže se žádná z cifer neopakuje?
3. Kolik přirozených čísel menších než 10^4 , jejichž cifry jsou navzájem různé?
4. Určete počet petic, které je možné nastavit na zámku trezoru s pěti kruhy, na kterých jsou číslice 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, jestliže
 - a) v pětici se každé číslo vyskytuje právě jednou
 - b) není žádné omezení
5. Určete počet všech šestimístních telefonních čísel sestavených z číslic 0, 1, ..., 9, která nezačínají nulou a žádná číslice se v nich neopakuje.
6. Určete počet všech přirozených čísel větších než 300 a menších než 5000, v jejichž zápisech se vyskytují cifry 2, 3, 4, 7, 8, a to každá nejvýše jednou.
7. Z kolika prvků lze vytvořit 992 variací druhé třídy bez opakování?
8. Zvětší-li se počet prvků o 5, zvětší se počet variací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků o 1170. Určete původní počet prvků.
9. Zmenšíme-li počet prvků o 27, zmenší se počet variací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků desetkrát. Určete původní počet prvků.
10. Kolika způsoby lze postavit 20 žáků do jedné řady při nástupu na tělocvik?
11. Kolika způsoby lze postavit do řady na policiku 10 různých knih českých a 5 různých anglických tak, že nejprve budou knihy české a vedle nich knihy anglické.
12. Kolik přímek určuje deset různých bodů v rovině, z nichž
 - a) žádné tři neleží v přímce,
 - b) právě šest leží v přímce?
13. Kolik rovin je určeno 15 různými body, jestliže
 - a) žádné čtyři neleží v jedné rovině,
 - b) právě pět z nich leží v jedné rovině?
14. Ve třídě je 30 žáků. Kolika způsoby lze vybrat čtveřici žáků na zkoušení?
15. Kolika způsoby lze 4 dívky a 8 chlapců rozdělit na dvě šestičlenná volejbalová družstva tak, aby v každém družstvu byla 2 děvčata a 4 chlapci?
16. Test přijímací zkoušky se skládá ze 10 otázek z chemie, z 10 otázek z biologie a z 10 otázek z fyziky. V každém předmětu je vybíráno ze 200 navržených otázek. Kolik je možností sestavit test? (Na pořadí nezáleží.)

17. Z kolika prvků lze vytvořit 990 kombinací druhé třídy bez opakování?
18. Zvětší-li se počet prvků o 4, zvětší se počet kombinací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků o 30. Určete původní počet prvků.
19. Zvětší-li se počet prvků o 15, zvětší se počet kombinací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků třikrát. Určete původní počet prvků.
20. Zvětší-li se počet prvků množiny o 2, zvětší se počet permutací jejích prvků dvanáctkrát. Určete počet prvků množiny.
21. Kolika způsoby lze rozdělit 9 zaměstnanců do 3 různých místností tak, aby v první místnosti byli 4 pracovníci, ve druhé 2 a ve třetí byli 3 pracovníci?
22. Fotbalové mužstvo má tři brankáře, pět obránců, čtyři záložníky a deset útočníků. Kolik různých mužstev může trenér sestavit, jestliže mužstvo se skládá z jednoho brankáře, čtyř obránců, dvou záložníků a čtyř útočníků.
23. Ve třídě je 19 chlapců a 16 dívek. Kolika způsoby je možné vybrat do soutěže 4 studenty tak, aby ve vybrané skupině byli:
- pouze chlapci
 - jedna dívka a tři chlapci
 - dvě dívky a dva chlapci.
24. Na taneční zábavě sedí u jednoho stolu 5 chlapců a 6 dívek. Určete kolika způsoby lze z nich vytvořit:
- právě 3 taneční páry
 - právě 4 taneční páry
 - právě 5 tanečních párů chlapec - dívka.
25. Řešte rovnice s neznámou $n \in \mathbb{Z}$:
- $\frac{n!}{(n-2)!} = 4n$
 - $\frac{10-17n}{(n+1)!} + \frac{4}{(n-1)!} = 0$
 - $\frac{(n+6)!}{(n+4)!}n - \frac{(n-4)!}{(n-5)!} = 5n+80$
 - $\frac{(n-3)!+(n-1)!}{(n-2)!} = 3$
26. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:
- $\binom{10}{4}x = \binom{12}{6}$
 - $\binom{x-2}{2} = 3$
 - $\binom{x}{2} + \binom{x+3}{1} = 4$
 - $\binom{x-1}{x-2} + \binom{x-2}{x-4} = 4$
 - $\binom{x-1}{x-3} + \binom{x-2}{x-4} = 9$
 - $\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \frac{x^2+1}{2}$
 - $\binom{10}{1}\binom{x}{x-2} - \binom{x+3}{x+1} = 15\binom{x}{0}$
 - $\binom{x-1}{x-3} - 2 \cdot \binom{x-2}{x-4} = 0$
27. Řešte nerovnice s neznámou $n \in \mathbb{Z}$:
- $72n! < (n+2)!$
 - $(n+2)! \cdot (24+6n) \leq (n+4)!$
 - $(n+1)! + (n+2)! \leq (n+3)!$
 - $\frac{n!}{(n-2)!} + 24 \geq 10n$
 - $n - \frac{(n-2)!}{(n-4)!} \geq -1$
 - $\frac{n!}{(n-2)!} - 3n \leq \frac{(n+4)!}{(n+3)!} + 2$

28. Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $\binom{x-2}{x-4}x+3 \geq 4x$

c) $\binom{x+4}{2} \geq \binom{x-4}{2}$

e) $\binom{8}{x} < 2 \binom{8}{x-1}$

b) $\binom{x+1}{x} + 2x < 50$

d) $\binom{x+1}{x-1} - \binom{x}{x} \cdot \binom{8}{5} \leq 44$

f) $\binom{7}{x+1} \leq \binom{7}{x} \cdot 2$

29. Upravte a určete podmínky pro n :

a) $\frac{7!+6!+5!}{8!-7!}$

c) $\frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2}$

e) $\frac{4-n^2}{(n+2)!} + \frac{n}{(n+1)!}$

g) $\frac{2}{n!} - \frac{2n}{(n+1)!} - \frac{2n+4}{(n+2)!}$

b) $\frac{n!(n+1)!}{(n-1)!(n+2)!}$

d) $\frac{(n-3)!(n^2-1)}{(n-1)!}$

f) $\frac{2}{(n-1)!} - \frac{2n^2+n}{(n+1)!}$

h) $\frac{(n+2)!}{n!} - 2 \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!}$

30. Zjednodušte a vypočítejte:

a) $\binom{8}{6}$

d) $\binom{n+2}{2}$

g) $\binom{15}{3} + \binom{8}{5} - \binom{15}{12}$

b) $\binom{16}{10}$

e) $\binom{n+3}{n}$

c) $\binom{185}{184}$

f) $\binom{n+2}{n-2}$

h) $\binom{9}{8} - \binom{9}{6} + \binom{9}{4} - \binom{9}{2}$