

9. KRUŽNICE, KRUH, KOULE, KULOVÁ PLOCHA

kružnice, kruh, kulová plocha a koule jako množina bodů, středový a obvodový úhel příslušný témuž oblouku kružnice, kružnice jako kuželosečka, středová a obecná rovnice kružnice, vzájemná poloha kružnice a přímky, kulová plocha, povrch a objem koule a jejich částí (kulová úseč a výseč, kulový pás a kulový vrchlík)

1. Je dána kružnice $k(S; r=3\text{ cm})$ a bod M , $|MS|=5\text{ cm}$. Sestrojte tečny z bodu M a vypočítejte jejich délky.
2. Je dána kružnice $k(S; r=4\text{ cm})$ a bod O uvnitř kružnice, $|OS|=1,5\text{ cm}$. Sestrojte všechny kružnice se středem O , které se dotýkají kružnice k .
3. Sestrojte kružnice k_1, k_2, k_3 , které mají poloměry $r_1 = 5,5\text{ cm}$, $r_2 = 2,5\text{ cm}$, $r_3 = 1,5\text{ cm}$ tak, aby
 - a) měly navzájem vnější dotyk
 - b) kružnice k_1, k_2 měly vnitřní, k_1, k_3 vnitřní a k_2, k_3 vnější dotyk.
4. V pravidelném osmiúhelníku $ABCDEFGH$ vypočítejte velikosti vnitřních úhlů v trojúhelnících:
 - a) ABG
 - b) ACE
 - c) BEH
5. Vypočítejte velikost vnitřních úhlů v trojúhelníku, který dostanete, spojíte-li na ciferníku hodinek body vyznačující 1, 5, 8.
6. Vypočítejte obvod pravidelného sedmiúhelníku, je-li dána délka jeho nejkratší úhlopříčky $u = 14,5\text{ cm}$.
7. Délky dvou soustředných kružnic jsou 26 cm a 18 cm. Určete obsah mezikruží vytvořeného těmito kružnicemi.
8. Obvod kruhové výseče, která je částí kruhu o poloměru 12 cm, je 39 cm. Vypočítejte její obsah.
9. Kruhová výseč má obvod 17 cm, obsah $17,5\text{ cm}^2$. Určete její poloměr a příslušný středový úhel.
10. Do kružnice o poloměru $r = 19\text{ mm}$ je vepsán pravidelný šestiúhelník. Vypočítejte obsah kruhové úseče ohraničené stranou šestiúhelníku a kružnicí.
11. Napište analytické vyjádření útvarů:
 - a) kružnice se středem $S[-1; 3]$ a poloměrem $r = 3$
 - b) vnitřní oblast kružnice se středem $S[2; 0]$ a poloměrem $r = 2\sqrt{3}$
 - c) vnější oblast kružnice se středem $S[-5; -2]$ a poloměrem $r = 3\sqrt{2}$
 - d) kruhu se středem $S[0; 5]$ a poloměrem $r = 2$
12. Napište rovnici kružnice, která má střed $S[6; 7]$ a
 - a) prochází bodem $A[0; 9]$
 - b) dotýká se přímky $p: 5x - 12y - 24 = 0$
 - c) dotýká se souřadnicové osy y
13. Napište rovnici kružnice, která má střed na přímce $p: 3x - 4y = 0$ a prochází body $A[5; 3]$, $B[6; 2]$.

14. Najděte souřadnice středu a poloměru kružnice, jejíž rovnice je:
- a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 8y = 9$ d) $x^2 + y^2 + 2x = 5$
e) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 13 = 0$ f) $x^2 + y^2 + \sqrt{8}x - \sqrt{12}y = 9$
15. Zjistěte, pro které hodnoty parametru p jsou dané rovnice rovnicemi kružnice. Určete souřadnice středu kružnice a její poloměr:
- a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + p = 0$ b) $x^2 + y^2 - 2x + 10y + p = 0$
c) $x^2 + y^2 - x - 2y + p = 0$ d) $x^2 + y^2 - 3x + 5y + p = 0$
16. Napište rovnici kružnice opsané trojúhelníku ABC :
- a) $A[-1; 3], B[0; 2], C[1; -1]$ b) $A[0; 0], B[3; 0], C[0; 4]$
c) $A[4; 3], B[2; -1], C[-5; 6]$
17. Napište středový tvar rovnice kružnice, která má střed v průsečíku přímek $p: x + 2y - 8 = 0$ a $q: 2x + y - 1 = 0$ a prochází bodem $A[-5; 9]$.
18. Určete reálné číslo $c \in \mathbb{R}$ tak, aby přímka $x + 2y + c = 0$ byla
- a) sečnou b) tečnou c) vnější přímkou
kružnice $x^2 + y^2 = 4$.
19. Určete vzájemnou polohu přímky p a kružnice k :
- a) $p: 2x - y - 6 = 0, k: x^2 + y^2 - 4x - 5y - 1 = 0$
b) $p: x + y - 8 = 0, k: x^2 + y^2 + 18x + 14y + 114 = 0$
c) $p: 2x - y = 0, k: x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$
20. Určete souřadnice společných bodů kružnic daných rovnicemi:
- a) $x^2 + y^2 = 25, x^2 + y^2 + 8x + 4y - 65 = 0$
b) $(x - 1)^2 + (y + 6)^2 = 49, x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$
21. Vypočítejte délku tětiny, kterou vytíná kružnice $x^2 + y^2 = 25$ na přímkou $3x + 4y + 15 = 0$.
22. Určete rovnice tečen kružnice k v jejím bodě T :
- a) $k: x^2 + y^2 = 25, T[3, y_0]$
b) $k: (x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 20, T[x_0, -3]$
23. Napište rovnice tečen kružnice k , které jsou rovnoběžné s přímkou p :
- a) $k: (x - 2)^2 + (y + 6)^2 = 13, p: 2x - 3y + 5 = 0$
b) $k: x^2 + y^2 - 5x + 7y + 1,5 = 0, p: 4x + y - 7 = 0$
24. Napište rovnici kulové plochy se středem $S[1; 3; -5]$ procházející bodem $A[2; 1; 1]$.
25. Určete střed a poloměr kulové plochy, která má rovnici:
- a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10y - 4z + 22 = 0$
b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 7y - 3z = 0$
c) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - z - 2 = 0$
26. Určete, pro které hodnoty parametru $m \in \mathbb{R}$, pro něž daná rovnice vyjadřuje kulovou plochu:
- a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + m = 0$
b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2mx - 6y + 1 = 0$

27. Napište rovnici kulové plochy se středem $S [4; 3; -1]$, která se dotýká roviny $\sigma : 2x + 6y + 3z + 5 = 0$.
28. Napište rovnici roviny, která se dotýká kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 10z = 0$ v bodě $A [-4; -4; 4]$.
29. Určete obecnou rovnici kulové plochy, která prochází body $A [2; -1; 0]$, $B [5; 0; -4]$, $C [0; -3; -2]$, $D [3; 6; -6]$.
30. Je dána přímka $p : x = 4, y = 1 - 6t, z = 4 - 6t, t \in \mathbb{R}$, a bod $S [-6; 6; 5]$. Najděte rovnici kulové plochy, která má střed v bodě S a s přímkou p má jeden společný bod.
31. Určete průsečíky kulové plochy $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ se souřadnicovými osami.
32. Určete vzájemnou polohu přímky $p : x = 9 + 4t, y = 1 + t, z = -2 - 3t, t \in \mathbb{R}$ a kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 + 28x - 22y + 24z - 164 = 0$.
33. Kulové kapky o poloměrech 3 mm a 5 mm se spojí v jedinou kapku. Určete její poloměr.
34. Železná koule má hmotnost 100 kg a hustotu $\rho = 7600 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Vypočítejte její povrch a objem.
35. Jaká je přibližná délka vlny, která je namotána na klubku tvaru koule o poloměru 8 cm, je-li průměr vlny 1 mm?
36. Kulová úseč má objem 850 cm^3 a výšku 5 cm. Určete poloměr koule, jejíž částí je daná úseč.
37. Ze tří koulí o poloměrech $r_1 = 3 \text{ cm}$, $r_2 = 4 \text{ cm}$, $r_3 = 5 \text{ cm}$ vyrobili jednu kouli. Určete její poloměr a povrch.
38. Do koule o poloměru $x \text{ cm}$ je vepsán válec, jehož poloměr podstavy je o 2 cm a výška o 1 cm menší než poloměr koule. Určete poloměr koule.
39. Jak velkou část zeměkoule (km^2) vidí letec z výšky 10 km nad povrchem Země.
40. Miska tvaru polokoule je naplněna vodou do výšky 10 cm. Průměr misky je 28 cm. Kolik litrů vody miska obsahuje?
41. Vypočítejte objem koule s co největším poloměrem, kterou lze vyrobit z krychle o velikosti hrany $a = 12 \text{ cm}$. Dále vypočítejte procento odpadu.
42. Jakou délku zemského poledníku představuje 1° zeměpisné šířky?
43. Kolik km^2 leží v mírném pásu na severní polokouli (mezi $23^\circ 27'$ a $66^\circ 18'$ severní šířky)?
44. Dokažte vzorec pro výpočet objemu koule.