1. ABSOLUTNÍ HODNOTA

definice absolutní hodnoty reálného čísla a geometrická interpretace, definice absolutní hodnoty komplexního čísla a geometrická interpretace, vzdálenost bodu od přímky (v rovině i v prostoru) a vzdálenost bodu od roviny, rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

1. Načrtněte graf funkce a uveďte její vlastnosti:

a) $f_1 : y = 2|x-3|+1$ b) $f_2 : y = 2x + |x+1| - |2x+5| + 3$

c) $f_3 : y = |6-2x| - |x| + |x+2| - 5$ d) $f_4 : y = \left|\frac{3-x}{x+2}\right|$

e) $f_5 : y = x|x-4|+3$ f) $f_6 : y = |-x^2 + 2|x| + 3|$

2. Je dána krychle *ABCDEFGH, a* = 4 cm. Vypočítejte vzdálenost:
a) bodu *A* od přímky *FH*
b) dvou rovnoběžných přímek *AE, CG*
c) dvou mimoběžných přímek *AE, FG*
d) bodu *F* od roviny *BEH*

3. Na přímce $p = \{[1-t; 2+3t] \, t \in \mathbb{R}\}$ určete bod *C* tak, aby měl stejnou vzdálenost od daných dvou bodů *A*[-4;2], *B*[2;-1].

4. Je dán trojúhelník *ABC, A*[-3; 4], *B*[-1; -2], *C*[3; 6]. Vypočítejte velikosti všech výšek.

5. Vypočítejte vzdálenost bodu *A*[4; -6; 1] od přímky $p = \{[3+t; 1+t; -1] \, t \in \mathbb{R}\}$.

6. Vypočítejte vzdálenost bodu *M* od přímky *p = AB*, je-li *M*[1; 0; 5], *A*[0; 1; 0], *B*[1; 0; 2].

7. Vypočítejte vzdálenost bodu *A* [4; 2; -3] od roviny $\rho : 2x - 2y + z + 5 = 0$.

8. Určete souřadnice bodu *M´*, který je s bodem *M*[1; 0; 2] souměrný podle roviny $\rho : x - 2y - z + 13 = 0$.

9. Vypočítejte absolutní hodnotu komplexního číslo *z*:

a) $z = \frac{1-3i}{2+i} + \frac{1+3i}{2-i}$

b) $z = (2+i)^2 + \frac{1+i}{1-i} + \frac{1}{i}$

10. Vypočítejte:

a) $\left|\frac{-2-3i}{3-2i}\right| - \left|\frac{1-3i}{5+2i}\right|$

b) $\left|1 + 2i - \frac{2-5i}{3-i}\right|$

c) $\left|1 - i + \frac{1+2i}{3-i}\right|$

11. Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel *z*, pro která platí:

a) $|z-1+i| = 2$ b) $|z-2-i| > 4$

c) $|z| = |z-2+i|$ d) $|z-1-3i| \geq |z+2i|$

e) $\left|\frac{\bar{z}}{|z|} + |z|\right| \leq |z-1|$ f) $|z+1-2i| \leq 3 \wedge |z+2-2i| > |z|$

g) $\left|z - \frac{1}{1+i}\right| < |z|$ h) $\left|\frac{\bar{z}}{|z|} - |z|\right| > |z+i|$

12. Řešte v $\mathbb{R}$ následující rovnice:

a) $|2x+1|+|1-2x|=3$

b) $|x|+2|x+1|-3|x-3|=0$

c) $|x+5|-|x-2|=|x|-x+7$

d) $|x^2-3x+3|=2$

e) $(x+1)^2-2|x+1|+1=0$

f) $|x^2-9|+|x^2-4|=5$

g) $\dfrac{|x|+3}{|x|-3}=3$

13. Řešte v $\mathbb{R}$ následující nerovnice:

a) $3|x+1|-|3x+2|<0$

b) $|x|+|2x-1|<x$

c) $|3x+1|-|x-2|+1>0$

d) $|x|<|x-1|-|x+1|$

e) $\left|\dfrac{2x+1}{x-3}+1\right|<1$

f) $x^2-5|x|+6<0$

g) $|x-6|>x^2-5x+9$

h) $\dfrac{x^2+6x-7}{|x+4|}<0$

14. Řešte v $\mathbb{R}$ soustavy nerovnice:

a) $2\leq|x-4|<5$

b) $3<|2x+4|<10$

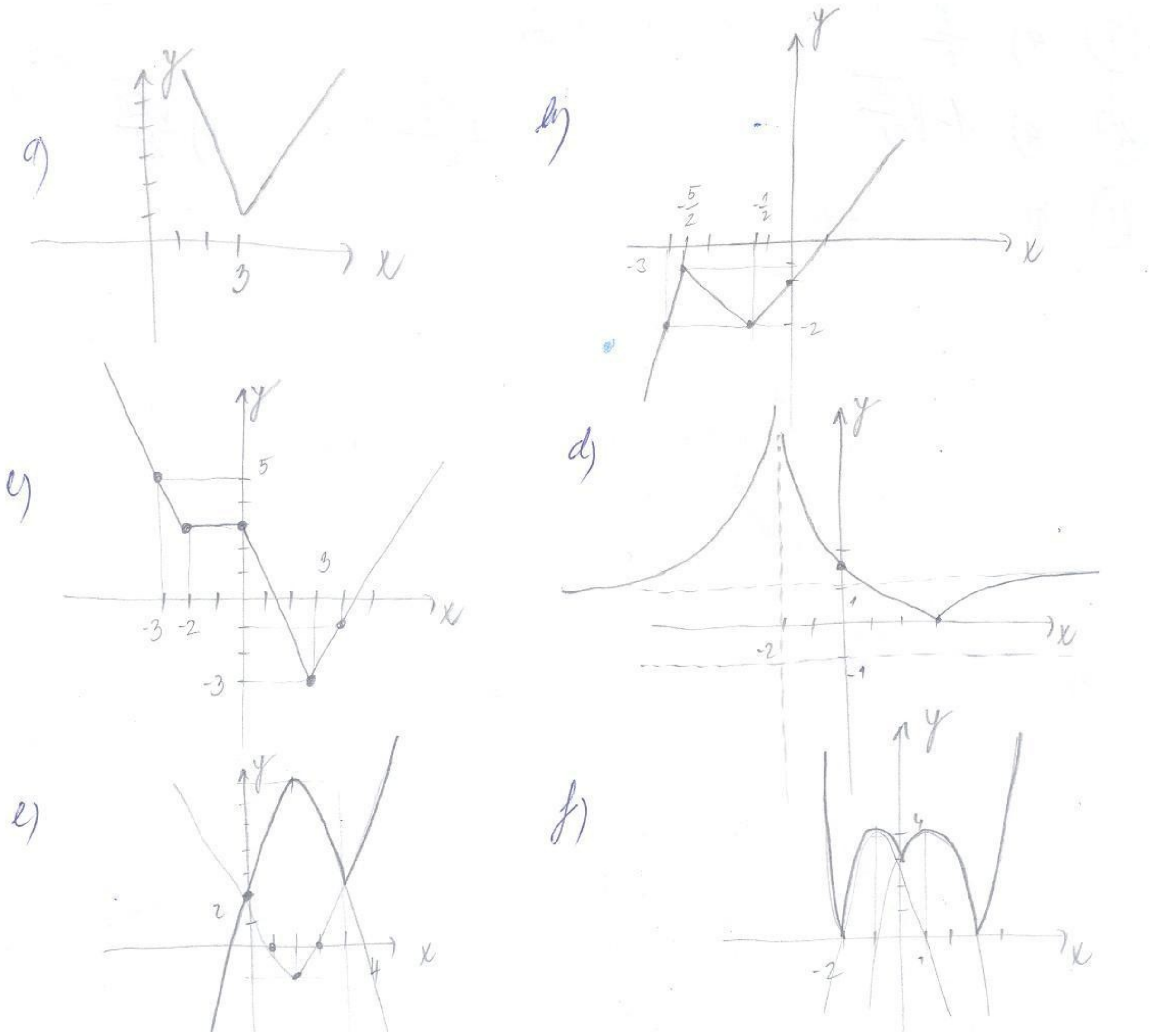
15. Řešte rovnice s neznámou $z\in\mathbb{C}$:

a) $|z|=1+2i+z$

b) $|z+i|=2z+i$

Řešení

1. viz obrázek



2. a) $2\sqrt{6}$ cm b) $4\sqrt{2}$ cm c) 4 cm d) $2\sqrt{2}$ cm

3. $C\left[\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right]$

4. $v_a=2\sqrt{5}, v_b=2\sqrt{10}, v_c=2\sqrt{10}$

5. 6

6. $2\sqrt{6}$

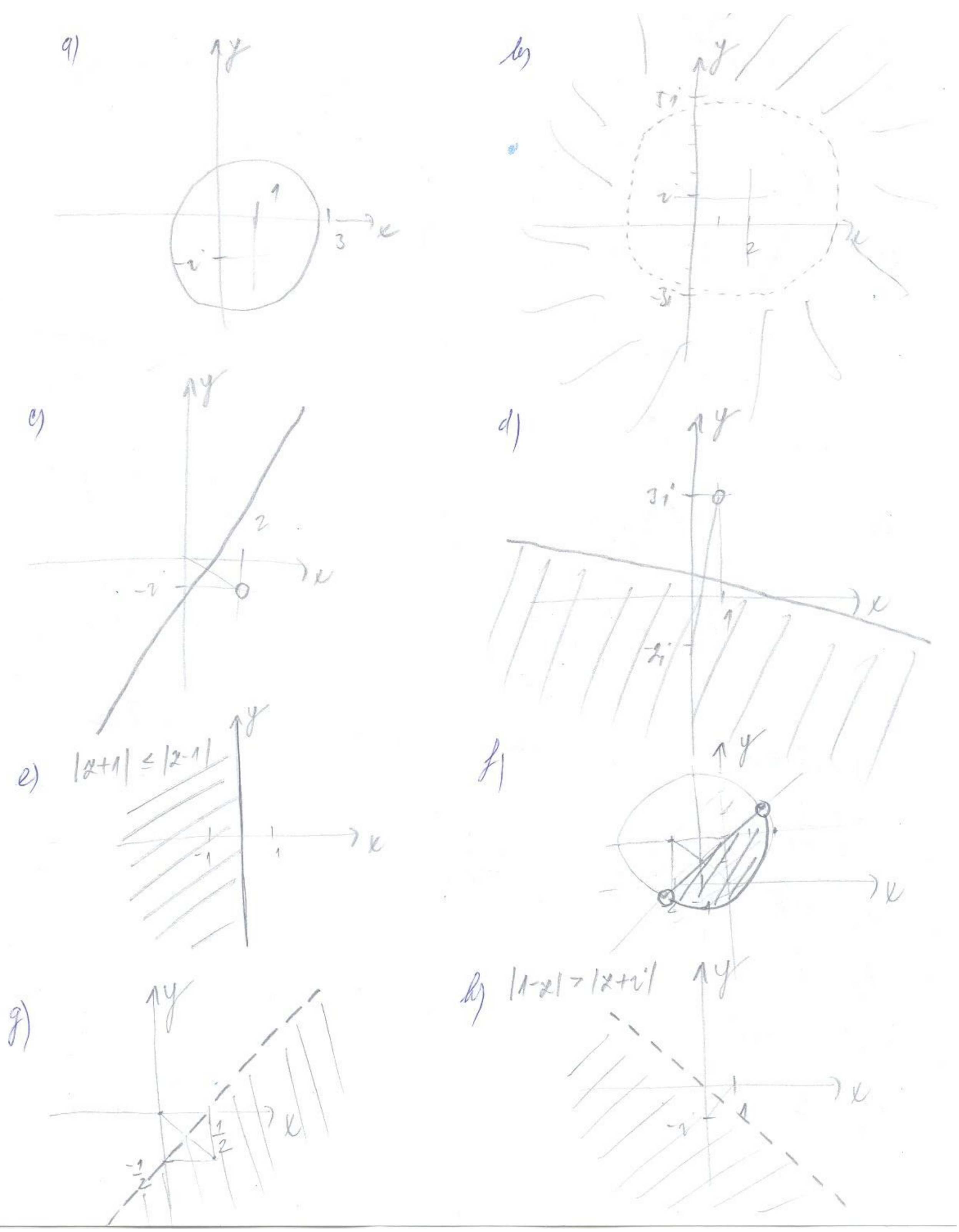
7. 2

8. $M'[-3;8;6]$

9. a) $\frac{8}{5}$ b) 5

10. a) $1-\sqrt{\frac{10}{29}}$ b) $\frac{\sqrt{1090}}{10}$ c) $\frac{\sqrt{130}}{10}$

11. viz obrázek



12. a) $\pm\dfrac{3}{4}$ b) $\dfrac{7}{6}$ c) $\langle 2;\infty)$

d) $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ e) -2; 0 f) $\langle -3;-2\rangle \cup \langle 2;3\rangle$ g) ± 6

13. a) $\left(-\infty;-\dfrac{5}{6}\right)$ b) $\{\}$ c) $(-\infty;-1)\cup(0;\infty)$

d) $(-\infty;0)$ e) $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{5}{4}\right)$ f) $(-3;-2)\cup(2;3)$

g) $(1;3)$ h) $(-7;-4)\cup(-4;1)$

14. a) $\langle -1;2\rangle \cup \langle 6;9\rangle$ b) $\left(-7;-\frac{7}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};3\right)$

15. a) $z=\frac{3}{2}-2i$ b) $z=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}i$

2. ALGEBRAICKÉ ROVNICE A NEROVNICE

ekvivalentní úpravy, vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice, iracionální rovnice a nutnost zkoušky, rovnice v množině komplexních čísel, binomická rovnice, rovnice s kombinačními čísly a faktoriály, soustavy rovnic, lineární a kvadratické nerovnice, grafické řešení lineárních nerovnic, znázorňování čísel v Gaussově rovině, definiční obory výrazů, nerovnice s kombinačními čísly a faktoriály, soustavy lineárních nerovnic

1. Užitím vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice řešte úlohy:

a) Sestavte kvadratickou rovnici o kořenech, jejichž součet je -1 a jejichž převrácené hodnoty mají součet $\frac{1}{2}$.

b) Sestavte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou rovny druhým mocninám kořenů rovnice $3x^2-15x+2=0$, aniž tuto rovnici řešíte.

c) Sestavte kvadratickou rovnici, která má kořeny převrácené hodnoty kořenů rovnice $6x^2-13x+6=0$, aniž tuto rovnici řešíte.

d) V rovnici $ax^2-8x+4=0$ určete *a* tak, aby jedním kořenem bylo číslo $\frac{2}{3}$.

e) Rovnice $x^2+ix+q=0$ má jeden kořen $x_1=2-i.$ Určete druhý kořen a koeficient $q\in\mathbb{C}$.

f) Rovnice $x^2+px+21=0$ má jeden kořen $x_1=-3+2i\sqrt{3}.$ Určete druhý kořen a koeficient $p\in\mathbb{C}$.

2. Řešte rovnice v daných množinách:

a) $2(x+3)-3\left(\frac{1}{4}x+2\right)=\frac{x+11}{8}$ v intervalu (-3;1>

b) $\frac{5x-11}{2}-\frac{5x+3}{5}=\frac{50-22x}{10}\,;x\in\mathbb{N}$

c) $x\sqrt{5}-1=x+2\,;x\in\mathbb{R}$

3. Řešte v $\mathbb{R}$ následující rovnice:

a) $\frac{2x-5}{3x-4}-\frac{4x-5}{6x-1}=0$

b) $\frac{1}{x-2}-\frac{x-3}{x+4}=\frac{6}{x^2+2x-8}-1$

c) $\frac{x+3}{x+1}+\frac{x+2}{x-3}=2+\frac{7x-1}{x^2-2x-3}$

d) $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}x+\frac{4}{3}}=\dfrac{\frac{5}{6}x-\frac{7}{6}}{1\frac{1}{4}x+1\frac{5}{4}}$

e) $x+\frac{1}{x+1}=1+\frac{x}{x+1}$

f) $\frac{x+\sqrt{2}}{x}-\frac{x}{x+\sqrt{2}}=2$

g) $x^2+15x=216$

h) $5x^2-18x-8=0$

i) $\frac{1}{x+4}-\frac{4}{x-4}+\frac{x^2-20}{x^2-16}=0$

j) $\frac{18x+7}{x^3-1}=\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1}$

4. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

a) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$

b) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$

c) $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$

d) $4\sqrt{8-x}-\sqrt{6x+150}=0$

e) $\sqrt{7-2\sqrt{x}}=\sqrt{18-13\sqrt{x}}$

f) $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-7}$

g) $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x-7}=2\sqrt{x}$

h) $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$

i) $x-\sqrt{x^2-11}=1$

5. Řešte kvadratické rovnice s neznámou $x\in\mathbb{C}$:

a) $3x^2-2x+1=0$

b) $x^2-4ix-8=0$

c) $x^2-6ix-9=0$

d) $x^2+x(2-i)+3-i=0$

6. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$ a výsledek zapište v algebraickém tvaru:

a) $x^3 - 1 = 0$
b) $x^3 + 8 = 0$
c) $x^4 + 1 = 0$
d) $x^6 - 64 = 0$
e) $x^2 - i = 0$
f) $x^2 - 2 - 2i\sqrt{3} = 0$

7. Řešte rovnice s neznámou $n \in \mathbb{Z}$:

a) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = 4n$
b) $\dfrac{10 - 17n}{(n+1)!} + \dfrac{4}{(n-1)!} = 0$
c) $\dfrac{(n+6)!}{(n+4)!} - n . \dfrac{(n-4)!}{(n-5)!} = 5n + 80$
d) $\dfrac{(n-3)! + (n-1)!}{(n-2)!} = 3$
e) $\dfrac{(n-4)! + (n-2)!}{(n-3)!} = 3$
f) $\dfrac{(n+6)!}{(n+4)!} + n^2 - 16n = 28$
g) $\dfrac{n!}{2!(n-2)!} + \dfrac{(n-1)!}{2!(n-3)!} = 4$

8. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $\binom{10}{4} x = \binom{12}{6}$
b) $\binom{x-2}{2} = 3$
c) $\binom{x}{2} + \binom{x+3}{1} = 4$
d) $\binom{x-1}{x-2} + \binom{x-2}{x-4} = 4$
e) $\binom{x-1}{x-3} + \binom{x-2}{x-4} = 9$
f) $\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \dfrac{x^2+1}{2}$
g) $\binom{10}{1}\binom{x}{x-2} - \binom{x+3}{x+1} = 15\binom{x}{0}$
h) $\binom{x-1}{x-3} - 2 . \binom{x-2}{x-4} = 0$

9. Řešte v $\mathbb{R}^2$, popř. $\mathbb{R}^3$ soustavy rovnic:

a)
$$\frac{2x+1}{5} - \frac{3y+2}{7} = 2y - x$$
$$\frac{3x-1}{4} + \frac{7y+2}{6} = 2x - y$$

b)
$$(x+1)^2 + (y+1)^2 + 10 = x(x+6) + y(y+6)$$
$$(x+1)^2 - (y+1)^2 + 8 = x(x-6) - y(y-6)$$

c)
$$\frac{2x-5}{x-4} - \frac{y+1}{y-2} = 1$$
$$\frac{3x+1}{x-1} - \frac{2y+9}{y+2} = 1$$

d)
$$x + 2y - 3z = -8$$
$$-3x + y + 2z = 10$$
$$2x - 3y + 2z = 5$$

e)
$$2x - 3y + 4z = 5$$
$$3x + 4y - 2z = 0$$
$$-4x + 2y + 3z = 8$$

f)
$$x + y - z = 0$$
$$2x + y - z = 1$$
$$4x + 2y - 3z = 0$$

g)
$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$
$$x + 2y = 4$$

h)
$$5x^2 + 3y^2 = 192$$
$$5x - 3y = -6$$

i)
$$4x^2 - 9y^2 - 2x + 27y - 20 = 0$$
$$3x + 5y - 8 = 0$$

10. Řešte nerovnice v daných množinách:

a) $2(x-1) - x > 3(x-1) - 2x - 5;\ x \in \mathbb{R}$
b) $\dfrac{2x-17}{4} - \dfrac{8-x}{2} - 2 \le x - 4 + \dfrac{x}{8};\ x \in \mathbb{R}$
c) $\dfrac{3x-1}{4} - \dfrac{5-6x}{2} \le 8 + \dfrac{3x}{2};\ x \in \mathbb{N}$
d) $\dfrac{7x-1}{3} + 6 > 5x - \dfrac{5+3x}{2};\ x \in \mathbb{N}$

e) $\frac{4x-3}{5}-\frac{3x-4}{2}+\frac{2x-5}{3}<0;\, x\in\mathbb{Z}$ f) $\frac{2x-1}{3}-\frac{x+3}{2}<3-\frac{x-2}{3};\, x\in\mathbb{N}_0$

g) $\frac{x+3}{2}-\frac{x-2}{3}-5<\frac{x-1}{2};\, x\in\mathbb{R}^-$ h) $-x^2+4x-4<0;\, x\in\mathbb{R}$

i) $x^2-4x+5>0;\, x\in\mathbb{R}$ j) $x^2-6x+8>0;\, x\in\mathbb{R}$

k) $\frac{x-2}{x-3}+\frac{15}{x^2-3x}=\frac{6}{x-3}-\frac{3}{2};\, x\in\mathbb{N}$ l) $1-\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x-1};\, x\in\mathbb{Z}$

m) $\frac{2}{2x+3}-\frac{2}{3-2x}=\frac{4x^2-21}{4x^2-9};\, x\in\mathbb{R}$ n) $\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x^2-x+1}=\frac{3}{x^3+1};\, x\in\mathbb{Z}$

11. Určete definiční obory výrazů:

a) $\sqrt{\frac{-2}{x^2-5x+6}}$ b) $\sqrt{6x-x^2}+\sqrt{x-1}$

c) $\sqrt{-4x^2+4x+3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{6+7x-3x^2}}$

12. Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel z, pro která platí:

a) $|z-2-i|>4$ b) $|z-1-3i|\geq|z+2i|$

c) $|z+1-2i|\leq 3\wedge|z+2-2i|>|z|$ d) $1<|z-3i-2|\leq 4$

e) $|z-4-i|\leq|z+3i|$ f) $|z-3+2i|>|z+2|$

g) $|z+2|\geq\left|\frac{4-3i}{8+4i}\right|$

13. Řešte nerovnice s neznámou $n\in\mathbb{Z}$:

a) $72n!<(n+2)!$ b) $(n+2)!.(24+6n)\leq(n+4)!$

c) $(n+1)!+(n+2)!\leq(n+3)!$ d) $\frac{n!}{(n-2)!}+24\geq 10n$

e) $n-\frac{(n-2)!}{(n-4)!}\geq -1$ f) $\frac{n!}{(n-2)!}-3n\leq\frac{(n+4)!}{(n+3)!}+2$

14. Řešte nerovnice s neznámou $x\in\mathbb{R}$:

a) $\binom{x-2}{x-4}x+3\geq 4x$ b) $\binom{x+1}{x}+2x<50$

c) $\binom{x+4}{2}\geq\binom{x-4}{2}$ d) $\binom{x+1}{x-1}-\binom{x}{x}.\binom{8}{5}\leq 44$

e) $\binom{8}{x}<2\binom{8}{x-1}$ f) $\binom{7}{x+1}\leq\binom{7}{x}.2$

15. V množině $\mathbb{R}$ řešte soustavy nerovnic:

a) $\begin{array}{l}2x+3\leq x+1\\ 4x>4-x\end{array}$ b) $\begin{array}{l}3x+1>0\\ x-1<10\end{array}$

c) $-2<x+5<2$ d) $-3\leq x-2<2x+1<\frac{1}{2}x$

e) $\begin{array}{l}\frac{1}{3}x+1<3x\\ 5-2x\leq 4x-1\\ 2+x>\frac{-x-2}{4}\end{array}$ f) $\begin{array}{l}\frac{x-1}{4}+\frac{7-x}{2}>3\\ 2x-3-\frac{x^2+2}{3}\leq 2-\frac{(3-x)^2}{3}\end{array}$

16. Graficky řešte nerovnice:

a) $\frac{x+2}{2}>\frac{x-2}{3}$ b) $2x-3\geq\frac{x+1}{2}$

c) $\frac{x-1}{2}>2x-\frac{1}{4}$

17. Graficky znázorněte množinu všech řešení soustavy nerovnic:

a) $\begin{array}{c} 3x+2y\geq 6 \\ x+2y\leq 4 \end{array}$

b) $\begin{array}{c} 3x+2y<6 \\ -2x+y<2 \\ y\geq -2 \end{array}$

c) $\begin{array}{c} x-y<2 \\ 2x+y\leq 4 \\ x>-1 \end{array}$

d) $\begin{array}{c} x-y\leq 1 \\ x+y>2 \\ \frac{1}{3}x-y\geq 1 \end{array}$

Řešení

1. a) $x^2+x-2=0$ b) $9x^2-213x+4=0$
c) $6x^2-13x+6=0$ d) $a=3$
e) $x_2=-2\,;q=-4+2i$ f) $x_2=-3-2i\sqrt{3}\,;\,p=6$

2. a) {} b) 3 c) $\frac{3(\sqrt{5}+1)}{4}$

3. a) -15 b) {} c) $\mathbb{R}-\{-1\,;3\}$ d) -1
e) 0; 1 f) ± 1 g) $9\,;-24$ h) $4\,;-\frac{2}{5}$
i) $8\,;-5$ j) $9\,;-4$

4. a) 2 b) 4 c) 2; 34 d) -1
e) 1 f) 2 g) 4 h) 3 i) 6

5. a) $\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{2}}{i}$ b) $-2\pm 2i$ c) 3 i d) $-1+2i\,;-1-i$

6. a) $1\,;-\frac{1}{2}\pm i\sqrt{3}$ b) $-2\,;1\pm i\sqrt{3}$ c) $\pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{2}$
d) $\pm 2\,;\pm 1\pm i\sqrt{3}$ e) $\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{2}\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{2}$ f) $\sqrt{3}+i\,;-\sqrt{3}-i$

7. a) 5 b) 2 c) 5 d) 3
e) 4 f) 2 g) 3

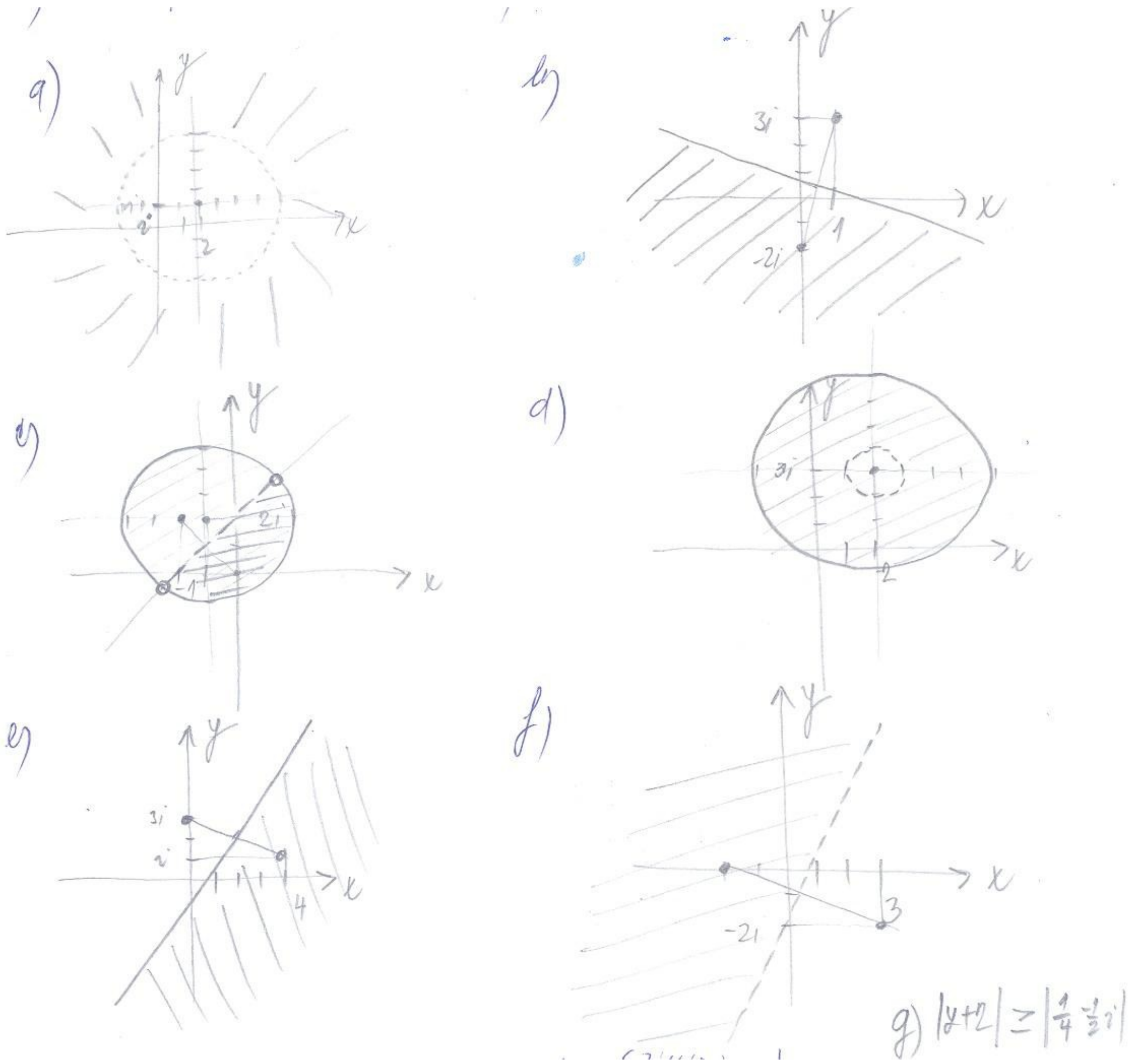
8. a) $4\frac{2}{5}$ b) 5 c) {} d) 4
e) 5 f) {} g) 3 h) 5

9. a) [7; 4] b) [1; 2] c) [5; 3] d) [3; 5; 7]
e) [0; 1; 2] f) [1; 1; 2] g) [0; 2] h) [3; 7]
i) [1; 1]

10. a) $(-\infty\,;-4\rangle$ b) $\langle -50\,;\infty)$ c) $\{1\,;2\,;3\,;4\}$
d) $\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$ e) $\{-7\,;-6\,;-5\,;...\}$ f) $\{1\,;2\,;...\,;10\}$
g) $(-7\,;0)$ h) $\mathbb{R}-\{2\}$ i) $\mathbb{R}$
j) $(-\infty\,;2)\cup(4\,;\infty)$ k) $\{2\}$ l) {}
m) {} n) $\{-2\}$

11. a) $(2\,;3)$ b) $\langle 1\,;6\rangle$ c) $\left\langle -\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right\rangle$ d) $\left(-\frac{2}{3}\,;3\right)$

12. viz obrázek



13. a) $\{8\,;9\,;10\,;...\}$ b) $\{3\,;4\,;5\,;...\}$ c) $\{-1\,;0\,;1\,;...\}$

d) $\{2\,;3\,;8\,;9\,;10\,;...\}$ e) $\{4\,;5\}$ f) $\{2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

14. a) $\{12\,;13\,;...\}$ b) $\{0\,;1\,;2\,;...\,;16\}$ c) $\{6\,;7\,;8\,;...\}$

d) $\{1\,;2\,;3\,;...\,;13\}$ e) $\{4\,;5\,;6\,;7\,;8\}$ f) $\{2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

3. ELIPSA

elipsa jako kuželosečka, definice elipsy, základní pojmy a vlastnosti, středová a obecná rovnice, vzájemná poloha elipsy a přímky

1. Ukažte, že $x^2+4y^2-6x+32y+48=0$ je obecná rovnice elipsy. Určete její střed, ohniska a vrcholy.

2. Určete základní charakteristiky elipsy a načrtněte ji.
a) $9x^2+25y^2-54x-100y-44=0$
b) $3x^2+2y^2+6x-5=0$
c) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$

3. Napište rovnici elipsy, jejíž hlavní osa je $\parallel$ s osou x:
a) $S\,[0;\,0]$; $a = 5$, $b = 3$
b) $S\,[2;\,-1]$; $a = 2$, $b = 2$
c) $S\,[-2;\,0]$; $a = 5$, $e = 3$
d) $A\,[3;\,1]$, $C\,[7;\,3]$

4. Napište rovnici elipsy, která má osy rovnoběžné s osami souřadnic, dotýká se os souřadnic, jestliže:
a) $S\,[6;\,-4]$
b) se dotýká osy x v bodě $R\,[-4;\,0]$ a osy y v bodě $Q\,[0;\,5]$

5. Elipsa je dána rovnicí $4x^2+16y^2=64$. Vypočítejte délku tětivy elipsy, která leží na přímce $\sqrt{3}x-2y=0$.

6. Napište rovnici elipsy se středem v počátku jdoucí body $M\left[\sqrt{3};-2\right], N\left[-2\sqrt{3};1\right]$. Osy elipsy jsou souřadnicové osy.

7. Určete všechny hodnoty parametru q, pro které má přímka p: $y = x + q$ s elipsou o rovnici $9x^2+16y^2=144$ společný alespoň jeden bod.

8. Určete souřadnice společných bodů přímky p a elipsy e, jsou-li dány jejich rovnice:
a) $p: 5x+y-20=0, e: 25x^2+3y^2=300$
b) $p: x+2y-15=0, e: 3x^2+2y^2=84$
c) $p: 3x+2y-16=0, e: x^2+4y^2+4x-8y-32=0$

9. Napište rovnici elipsy s ohnisky $E\,[-3;\,-1]$, $F\,[-3;\,5]$, jež prochází bodem $M\,[-7;\,2]$.

10. Určete rovnice tečny elipsy $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ v jejím bodě $T\left[4;-\frac{9}{5}\right]$.

11. Určete rovnice tečen elipsy $9x^2+16y^2=144$, které mají směrnici $k = 1$.

12. Je dána elipsa $e: (x+2)^2+4(y-1)^2=36$. Určete reálný parametr d v rovnici přímky $p: y+d=0$ tak, aby přímka p byla tečnou elipsy e.

13. Napište rovnice tečen k elipse $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ rovnoběžných s přímkou $p: 2x-y+17=0$.

14. Napište rovnice tečen, které lze sestrojit z bodu $M\,[0;\,0]$ k elipse o rovnici $x^2+2y^2-8x+4y+12=0$.

15. Napište rovnice tečen, které lze sestrojit z bodu $P\,[0;\,-3]$ k elipse o rovnici $5x^2+9y^2=45$.

16. Určete rovnici tečny k elipse $e: x^2+2y^2-8y=0$ v jejích průsečících s osou *y*.

17. Je dána elipsa $e: \frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$. Najděte rovnice tečen rovnoběžných s přímkou $p: 2x-y+3=0$.

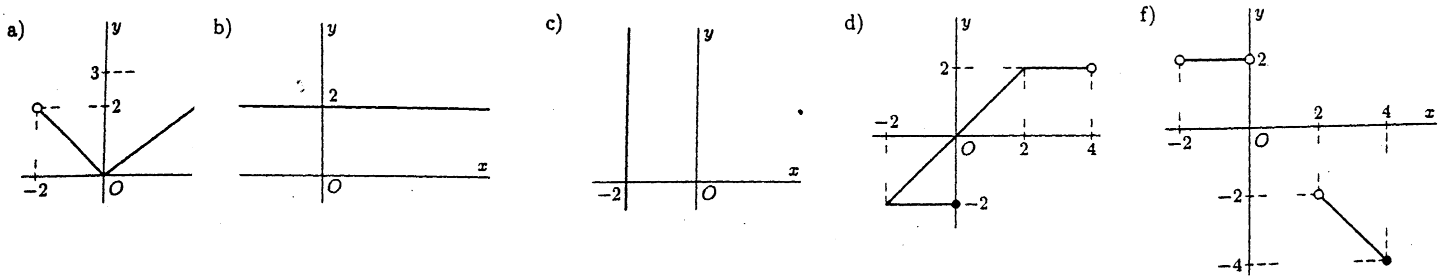
18. Určete odchylku tečen vedených z bodu *M* [0; 4] k elipse $e: 4x^2+9y^2=36$.

19. Do elipsy $e: 2x^2+y^2-4x+4y-102=0$ je vepsán čtverec. Určete délku jeho středu a načrtněte obrázek.

4. FUNKCE, JEJICH VLASTNOSTI A GRAFY

definice funkce, definiční obor a obor hodnot, vlastnosti (parita - sudá a lichá funkce, monotonie - rostoucí a klesající funkce, omezenost funkce, prostá funkce, inverzní funkce), limita a spojitost funkce, derivace funkce a jejich využití pro průběh funkce (tečna a asymptoty grafu funkce)

1. Rozhodněte, který z grafů na obrázku je grafem funkce. U funkcí určete jejich definiční obory a obory hodnot.



2. Určete definiční obory uvedených funkcí:

a) $f_1(x)=\sqrt{\dfrac{x-20}{2-x}}$ b) $f_2(x)=\dfrac{2x-1}{2x^2-2x+1}$

c) $f_3(x)=\sqrt{1-|x|}$ d) $f_4(x)=\dfrac{5x+8}{x^2-3x+2}$

e) $f_5(x)=\dfrac{x}{\sqrt{(5-x)(x-3)}}$ f) $f_6(x)=\log(-x)-\dfrac{1}{x+5}$

g) $f_7(x)=\sqrt{\log_5 x+1}$ h) $f_8(x)=\dfrac{3}{4-\ln x}$

i) $f_9(x)=\dfrac{5-\sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}$ j) $f_{10}(x)=\sqrt{3-x^2}+\sqrt{1-x}$

3. Dokažte, že funkce $f_1(x)=2x-1$ je rostoucí v $\mathbb{R}$.

4. Dokažte, že funkce $f_2(x)=-3x+6$ je klesající v $\mathbb{R}$.

5. Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou prosté ve svém definičním oboru:

a) $f_1(x)=2x+5$ b) $f_2(x)=x^2-4$

c) $f_3(x)=2^x$ d) $f_4(x)=|x+1|$

6. Které z funkcí jsou sudé (liché) v definičním oboru?

a) $f_1(x)=|x|$ b) $f_2(x)=\dfrac{4x}{x^2-4}$

c) $f_3(x)=\dfrac{x^2}{|x|+3}$ d) $f_4(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+1}$

7. Dokažte, že funkce $f(x)=\dfrac{10}{x^2+2}$ je omezená v definičním oboru.

8. Rozhodněte, ke kterým z daných funkcí existují funkce inverzní v definičním oboru, své tvrzení zdůvodněte a grafy funkcí načrtněte.

a) $f_1(x)=2x-1$ b) $f_2(x)=x^2-2x$

c) $f_3(x)=3^x$ d) $f_4(x)=\log_2 x+1$

e) $f_5(x)=2^{x-1}-4$ f) $f_6(x)=|x+2|$

9. Vypočítejte limity funkcí:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2x-1}{x+1}$

b) $\lim_{x\to -2} \frac{x^4-16}{x^3+8}$

c) $\lim_{x\to 6} \frac{5x+6-x^2}{7x-6-x^2}$

d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-5\sin x+2}$

e) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

f) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

g) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^4-x^3+4}{5x^4+x^2+2}$

h) $\lim_{x\to \infty} \sqrt{\frac{2x+3}{x-1}}$

i) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$

j) $\lim_{x\to \infty} \frac{2^{x+3}+4}{2^{x-1}+1}$

k) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}$

l) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{1-cotg\, x}$

m) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

n) $\lim_{x\to \infty} \frac{(2x-3)^5.(3x+25)^{25}}{(2x+1)^{30}}$

o) $\lim_{x\to 0} x.cotg\, x$

p) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1}$

10. Vypočítejte derivace následujících funkcí a určete jejich definiční obory:

a) $f_1(x)=x.\sin x$

b) $f_2(x)=\sin x.tg\, x$

c) $f_3(x)=\frac{2x-1}{x+3}$

d) $f_4(x)=\frac{x^2+2x}{1-x^2}$

e) $f_5(x)=(x^2+1)^6$

f) $f_6(x)=\sqrt{4x^3-x}$

g) $f_7(x)=\cos(2x+4)$

h) $f_8(x)=\ln(2x+4)$

i) $f_9(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$

j) $f_{10}(x)=\frac{x^2.\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

k) $f_{11}(x)=\sin\frac{1}{2}x+\cos\frac{1}{2}x$

l) $f_{12}(x)=e^{x^2-3x}$

11. Je dána funkce $f: y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x;$ pro která $x\in\mathbb{R}$ platí *f´(x)* = 0 ?

12. Je dána funkce $f: y=\frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x};$ vypočítejte derivaci dané funkce v libovolném bodě $x\in\mathbb{R}$.

13. Napište rovnici tečny ke grafu funkce $y=f(x)$ v bodě *T*. Rovnici tečny uveďte v obecném tvaru:

a) $f_1(x)=x^2-2x, T[4; y_0]$

b) $f_2(x)=\frac{1}{x^{2,}} T\left[\frac{1}{2}; y_0\right]$

c) $f_1(x)=\frac{2x-1}{x+1}, T[-2; y_0]$

d) $f_4(x)=e^x-e^{-x}, T[0; y_0]$

14. Jaký úhel s osou *x* svírá tečna grafu funkce $f: y=2x^3-x$ v průsečíku tohoto grafu s osou *y* ?

15. Užitím derivace určete intervaly monotónnosti následujících funkcí:

a) $f_1(x)=x+\frac{1}{x}$

b) $f_2(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f_3(x)=\frac{x^2-3x+2}{x}$

d) $f_4(x)=(x^2-1)^4$

e) $f_5(x)=3x^4-4x^3$

f) $f_6(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

g) $f_7(x)=\cos^2 x+5\cos x$ v intervalu $\langle 0; 2\pi\rangle$

16. Najděte lokální extrémy funkcí:

a) $f_1(x)=\dfrac{x^2}{x+3}$

b) $f_2(x)=\dfrac{-2}{x^2+4}$

c) $f_3(x)=\sqrt{x}+\dfrac{4}{x}$

d) $f_4(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$

e) $f_5(x)=-x^4-2x^2+3$

f) $f_6(x)=x^3+2x-18$

17. Určete inflexní body a asymptoty funkce:

a) $f_1(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

b) $f_2(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

c) $f_3(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$

18. Určete intervaly konvexní a konkávní funkce:

a) $f_1(x)=\dfrac{e^x}{x}$

b) $f_2(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

c) $f_3(x)=\dfrac{4x}{1+x^2}$

19. Vyšetřete průběh funkce:

a) $f_1(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

b) $f_2(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

c) $f_3(x)=\dfrac{9(x+1)}{x^2}$

d) $f_4(x)=2x^2-\ln x$

e) $f_5(x)=e^{-x^2}$

f) $f_6(x)=\dfrac{x+2}{x^2}$

20. Užitím l´Hospitalova pravidla vypočítejte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3-4x^2+x}{4x^3+x}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^4+x^3+x-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

5. GEOMETRICKÁ ZOBRAZENÍ

množiny bodů daných vlastností, konstrukční úlohy, shodnost (osová a středová souměrnost, posunutí, otočení), podobnost a stejnolehlost

1. Sestrojte množinu všech bodů, z nichž je úsečka $|AB| = 5\text{cm}$ vidět pod úhlem
a) 60° b) 100°

2. Najděte množinu všech bodů, z nichž vidíme danou úsečku *AB* pod úhlem vetším než 45° a menším než 60°.

3. Jsou dány dva různé body *A, B*. Určete množinu vrcholů *X* všech tupých úhlů *AXB*.

4. Jsou dány dvě rovnoběžky *a, b* ve vzdálenosti 4 cm. Najděte množinu všech bodů *X*, pro které platí $|X\,a| + |X\,b| = 6\text{cm}$.

5. Je dán čtverec *ABCD*. Na jeho obvodu najděte bod *X* tak, aby z něho bylo vidět jeho úhlopříčku *AC* pod úhlem 120°.

6. Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno
a) $c = 7$ cm, $v_a = 6{,}5$ cm, $a + b = 12{,}5$ cm
b) $c = 4$ cm, $\alpha = 60°$, $b - a = 1$ cm.

7. Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(O; r_1), k_2(O; r_2), r_1 > r_2,$ a bod *S* ležící na menší z nich. Sestrojte rovnoběžník *ABCD* se středem *S*, jehož vrcholy leží na daných kružnicích.

8. Jsou dány dvě různoběžné přímky *p, q* a bod *S*, pro který platí: $S \notin p \wedge S \notin q.$ Sestrojte čtverec *ABCD* tak, aby $A \in p \wedge C \in q.$

9. Je dán trojúhelník *ABC* a jeho vnitřní bod *M*. Sestrojte všechny úsečky *XY* se středem *M* a krajními body *X, Y* na hranici trojúhelníku *ABC*.

10. Jsou dány přímky *a, b, o*. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky *ABC*, pro které platí: $a \| b, b \nparallel o, A \in a, B \in b, t_c \subset o.$

11. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2, které se protínají ve dvou bodech *Q, R*. Bodem *Q* veďte přímku, která vytíná na obou kružnicích tětivy stejné délky.

12. Jsou dány kružnice $k_1(S_1; 3\text{cm}), k_2(S_2; 2\text{cm}), |S_1 S_2| = 7\text{cm}.$ Sestrojte všechny úsečky *XY*, pro které platí: $X \in k_1, Y \in k_2, XY \| S_1 S_2, |XY| = \frac{1}{2} S_1 S_2.$

13. Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(S_1; 4\text{cm}), k_2(S_2; 3\text{cm})$ a bod *A*, $|SA| = 2\text{cm}.$ Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky *ABC*, pro které platí: $B \in k_1, C \in k_2.$

14. Je dána přímka *p* a dvě kružnice k_1, k_2 v různých polorovinách určených přímkou *p*. Sestrojte kolmici k přímce *p* tak, aby její průsečík s přímkou *p* byl středem úsečky, jejíž krajní body leží na k_1 a k_2.

15. V různých polorovinách s hraniční přímkou *p* jsou dány body *A, B* nestejně vzdálené od přímky *p*. Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky, jejichž ramena procházejí body *A, B*, mají základnu kolmou k přímce *p* a tato základna má danou velikost $d = 4$ cm.

16. Je dána přímka *p*, kružnice *k* a bod *Q*. Sestrojte všechny úsečky, jež mají střed *Q*, jeden krajní bod na přímce *p* a druhý na kružnici *k*.

17. Jsou dány dvě kružnice a bod *A*. Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky *ABC*, jež mají

$|\sphericalangle BAC| = 75°,$ základnu *BC*, vrchol *B* na jedné kružnici a vrchol *C* na druhé kružnici.

18. Je dán bod *S* a dvě různé kružnice k_1, k_2. Sestrojte všechny čtverce *ABCD*, jež mají:
a) střed *S*, vrchol $A \in k_1$ a vrchol $C \in k_2$,
b) střed *S*, vrchol $A \in k_1$ a vrchol $B \in k_2$.

19. Jsou dány tři rovnoběžky *a, b, c* a bod $C \in c.$ Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky *ABC*, jež mají vrchol $B \in b$ a vrchol $A \in a.$

20. Je dána kružnice *k* a úsečka *XY*. Sestrojte tětivu *AB* kružnice *k* tak, že: $|AB| = |XY| \wedge AB \| XY.$

21. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 a úsečka *MN*. Sestrojte úsečku *AB* tak $|AB| = |MN| \wedge AB \| MN,$ aby bod $A \in k_1.$

22. Jsou dány dvě různoběžky *a, b* a úsečka *MN*. Sestrojte čtverec *ABCD*, pro který platí $A \in a, B \in b, AB \| MN, |AB| = |MN|.$

23. Je dán trojúhelník *ABC* (*a* = 4 cm, *b* = 3 cm, *c* = 5 cm). Vně trojúhelníku *ABC* sestrojte bod *S* tak, platilo $|AS| = 3\,cm, |CS| = 4\,cm.$ Narýsujte obraz trojúhelníku *ABC* ve stejnolehlosti se středem *S* a koeficientem:

a) $k = \frac{3}{2}$ b) $k = \frac{1}{3}$ c) $k = -\frac{3}{4}$ d) $k = -1$

24. Je dán čtverec *ABCD* o straně *a* = 4 cm. *S* je střed čtverce. Nakreslete obraz čtverce *ABCD* ve stejnolehlosti se středem *S* a koeficientem

a) $k = \frac{1}{2}$ b) $k = 2$ c) $k = \frac{1}{2}$ d) $k = -2$

25. Jsou dány kružnice $k_1(O_1; 2{,}5\,cm), k_2(O_2; 1{,}5\,cm).$ Určete středy a koeficienty stejnolehlostí, v nichž je obrazem kružnice k_1 kružnice k_2. Volte
a) $|O_1 O_2| = 6\text{cm}$
b) $|O_1 O_2| = 4\text{cm}$
c) $|O_1 O_2| = 3\text{cm}$
d) $|O_1 O_2| = 1\text{cm}$
e) $|O_1 O_2| = 0{,}5\,cm$

26. Do daného ostroúhlého trojúhelníku *ABC* vepište čtverec *KLMN* tak, aby $KL \subset AB, M \in BC, N \in AC.$

27. Jsou dány dvě rovnoběžky *a, b* a bod *M* $(M \notin a, M \notin b).$ Sestrojte kružnici, která prochází bodem *M* a dotýká se přímek *a, b*.

28. Do půlkruhu s průměrem *AB* vepište čtverec *XYUV* tak, aby jeho strana *XY* ležela na průměru *AB*.

29. Do kružnice $k(S; 4\text{cm})$ vepište obdélník *ABCD*, pro který platí: $|AB| : |BC| = 3 : 4.$

6. GONIOMETRICKÉ FUNKCE, ROVNICE A NEROVNICE

definice goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku, pomocí jednotkové kružnice, jejich vlastnosti a grafy, vztahy mezi goniometrickými funkcemi, řešení goniometrických rovnic a nerovnic, goniometrický tvar komplexního čísla, limity s goniometrickými funkcemi, výpočet neurčitého integrálu s goniometrickými funkcemi

1. Určete hodnoty goniometrických funkcí (bez použití kalkulačky):

a) $\sin\left(-\frac{31}{4}\pi\right)$ b) $cotg\left(\frac{31}{4}\pi\right)$

c) $\cos\left(\frac{109}{6}\pi\right)$ d) $tg\left(-\frac{109}{6}\pi\right)$

2. Určete hodnotu výrazu:

a) $\sin 225° - \cos 240° + tg\, 300° - cotg\, 330°$

b) $\dfrac{\sin\left(-\frac{17}{3}\pi\right) . tg\frac{9}{4}\pi}{\cos\frac{7}{6}\pi . cotg(-300°)}$

3. Vypočítejte:

a) $\sin x, tg\, x, cotg\, x,$ je-li $\cos x = -\frac{1}{8}, x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$

b) $\sin x, \cos x,$ je-li $tg\frac{x}{2} = \frac{2}{3}, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

c) $\sin x, \cos x, cotg\, x,$ je-li $tg\, x = -\frac{5}{12}, x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

4. Zjednodušte následující výrazy:

a) $\dfrac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x}$ b) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} + \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

c) $\dfrac{\cos^2 2x - 1}{\sin^2 2x - 1}$

5. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ jsou definovány uvedené rovnosti, a pak je dokažte:

a) $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2 - 1}{\sin x . \cos x} = 2$ b) $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$

c) $\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + cotg^2 x$ d) $\dfrac{1}{\cos x} - \sin x . tg\, x = \cos x$

e) $\dfrac{1+\cos 2x}{\sin 2x} = cotg\, x$ f) $\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x - \cos^2 x} = -2\, cotg\, x$

g) $\sin 75° = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ h) $\cos 105° = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

6. Načrtněte grafy goniometrických funkcí:

a) $y = |\sin x|$ b) $y = |\sin x| - \frac{1}{2}$

c) $y = 1 - |\sin x|$ d) $y = |2\sin x - 1|$

e) $y = \sin(-2x)$ f) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

g) $y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ h) $y = 2\sin x + 1$

i) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ j) $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$

7. Řešte rovnice s neznámou $x\in\mathbb{R}$:

a) $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ b) $\sin x+\cos 2x=1$

c) $2\sin x=\sqrt{3}\,.\,tg\,x$ d) $2\sin^2 x-5\cos x+1=0$

e) $\sin x+\cos x=0$ f) $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=0$

g) $2\sqrt{3}\,cotg\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-2$ h) $\frac{5+\sin x}{1-\sin x}=3$

i) $4\cos^2 x-4\cos x-3=0$ j) $3\sin^2 x+\cos x+\cos^2 x=0$

k) $\sin 2x+\cos x=0$ l) $\sin x-\cos 2x=0$

m) $\sin 2x=(\cos x-\sin x)^2$

8. Řešte nerovnice s neznámou $x\in\mathbb{R}$:

a) $\sin x\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $tg\,x\leq-1$

c) $\sin x<0$ d) $cotg\,x>-1$

e) $0\leq\cos x<\frac{1}{2}$ f) $|\sin x|\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\sin 2x\leq\frac{1}{2}$ h) $\cos\frac{x}{2}>0$

9. Následující komplexní čísla vyjádřete v goniometrickém tvaru:

a) $z=2$ b) $z=-2$

c) $z=2i$ d) $z=2-2i$

e) $z=-1+i\sqrt{3}$ f) $z=-3\sqrt{2}-3i\sqrt{2}$

g) $z=2\sqrt{3}+2i$

10. Vypočítejte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+tg^2 x}{x.\sin x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x.\sin x}$ d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-5\sin x+2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}x\,.\,cotg\,x$ f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-cotg\,x}$

11. Vypočítejte následující integrály:

a) $\int\frac{1}{\sin^2 x\,.\cos^2 x}dx$ b) $\int cotg^2 x\,dx$

c) $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx$ d) $\int\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)dx$

e) $\int tg\,x\,dx$ f) $\int\sin^6 x\,.\cos x\,dx$

12. Pomocí per partes vypočítejte následující integrály:

a) $\int\sin^2 x\,dx$ b) $\int\cos^2 x\,dx$

c) $\int e^x.\cos x\,dx$ d) $\int x^2.\sin x\,dx$

e) $\int\ln^2 x\,dx$ f) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$

g) $\int x^3.\ln x\,dx$ h) $\int x\,.\,e^{3x}\,dx$

7. HYPERBOLA

hyperbola jako kuželosečka, definice hyperboly, základní pojmy a vlastnosti, středová a obecná rovnice hyperboly, rovnice asymptot, vzájemná poloha hyperboly a přímky, hyperbola jako graf funkce

1. Rozhodněte, zda se jedná o rovnici hyperboly. V kladném případy určete její základní charakteristiky a hyperbolu načrtněte.

a) $4x^2-9y^2+24x+36y+36=0$
b) $5x^2-4y^2+20x-48y+1=0$
c) $25x^2-16y^2-150x+224y-959=0$
d) $16x^2-9y^2+32x+18y-137=0$
e) $9x^2-16y^2-90x-64y+17=0$
f) $y^2-4x^2+2y+8x-11=0$

2. Pro které hodnoty parametru $t\in\mathbb{R}$ je přímka $p: x-y+t=0$ sečnou hyperboly $4x^2-25y^2-100=0$.

3. Hyperbola má ohniska $E[-5;0]$, $F[5;0]$ a prochází bodem *M* [1;0]. Určete její rovnici.

4. Určete přímku, která prochází bodem *T* [8; y_0] kuželosečky $x^2-4y^2-6x-16y-11=0$ a má s ní společný právě jeden bod.

5. Napište rovnici hyperboly s ohnisky *E* [0; 2], *F* [0; 6], která prochází bodem *L* [0; 3].

6. Napište rovnici hyperboly, je-li dáno:

a) *A* [-3; -2], *B* [7; -2], *b* = 3
b) *A* [2;3], *B* [2;-5], *F* [2;4]

7. Je dána hyperbola o rovnici $h: 4x^2-y^2=36$.

a) Určete, pro jakou hodnotu parametru *t*, je přímka $p: 5x-2y+t=0$ tečnou hyperboly.
b) Napište rovnice tečen v bodě *T* [5; *y*] hyperboly.
c) Napište rovnice tečen rovnoběžných s přímkou $p: 3x-y-2=0$.

8. Bodem *A* [2; 1] veďte všechny přímky s hyperbolou $h: x^2-2y^2=2$, které mají právě jeden společný bod.

9. Napište rovnici hyperboly, jestliže její hlavní osa je rovnoběžná s osou *x*, *a* = 2 a rovnice jejich asymptot jsou $a_1: y=2x-6, a_2: y=-2x+10$.

10. Napište rovnice všech tečen hyperboly $4x^2-y^2=36$, které jsou rovnoběžné s přímkou $5x-2y+7=0$.

11. Určete délku tětivy, kterou vytíná hyperbola $x^2-2y^2=4$ na přímce $y=x-2$.

12. Určete vzájemnou polohu a společné body hyperboly o rovnici $x^2-4y^2=16$ a přímky dané rovnicí nebo parametrickým vyjádřením:

a) $x-2=0$
b) $x=4-t, y=1{,}5t; t\in\mathbb{R}$
c) $5x-6y-16=0$
d) $x=1+t, y=3+2t; t\in\mathbb{R}$
e) $x=-2+2t, y=-3+t; t\in\mathbb{R}$

13. Načrtněte grafy funkcí a určete definiční obory:

a) $f_1: y=\frac{1}{x}+2$ b) $f_2: y=\frac{1}{x}-3$

c) $f_3 : y = 2 - \frac{3}{x}$

d) $f_4 : y = \frac{1}{x+2}$

e) $f_5 : y = \frac{1}{x-3}$

f) $f_6 : y = \frac{-3}{x+2}$

g) $f_7 : y = \frac{3x-2}{x-1}$

h) $f_8 : y = \frac{-2x+3}{x-3}$

14. Je dána funkce $f : y = \frac{x-1}{x+2}$.

a) Určete její definiční obor.
b) Určete funkční hodnoty $f(-1), f(0), f(1)$.
c) Určete, pro která *x* je *f(x)* = 2.
d) Určete průsečíky jejího grafu se souřadnicovými osami.
e) Načrtněte její graf.
f) Určete její obor hodnot a popište její další vlastnosti.

15. Určete předpis pro lineární lomenou funkci, jejímž grafem je hyperbola se středem v bodě *S* [-1, 2] procházející bodem *A* [-2, -1].

16. Načrtněte graf a popište vlastnosti funkce $f : y = \left|\frac{x-1}{x-2}\right|$.

17. Ukažte, že grafem funkce $f : y = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 1}$ je „téměř celá“ rovnoosá hyperbola.

8. KOMBINATORIKA

základní kombinatorické pojmy (variace, permutace, kombinace bez opakování a s opakováním), rovnice a nerovnice s kombinačnímuý čísly a faktoriály, kombinatorické výrazy

1. Kolik je pěticiferných, čtyřciferných a trojciferných čísel s různými ciframi, jestliže tato čísla <u>neobsahují</u> cifry 0, 1, 3, 4, 6?

2. Kolik přirozených čísel menších než 5000 je možné vytvořit z číslic 0, 3, 4, 5, jestliže se žádná z cifer neopakuje?

3. Kolik přirozených čísel menších než 10^4, jejichž cifry jsou navzájem různé?

4. Určete počet pětic, které je možné nastavit na zámku trezoru s pěti kruhy, na kterých jsou číslice 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, jestliže
a) v pětici se každé číslo vyskytuje právě jednou
b) není žádné omezení

5. Určete počet všech šestimístních telefonních čísel sestavených z číslic 0, 1, ..., 9, která nezačínají nulou a žádná číslice se v nic neopakuje.

6. Určete počet všech přirozených čísel větších než 300 a menších než 5000, v jejichž zápisech se vyskytují cifry 2, 3, 4, 7, 8, a to každá nejvýše jednou.

7. Z kolika prvků lze vytvořit 992 variací druhé třídy bez opakování?

8. Zvětší-li se počet prvků o 5, zvětší se počet variací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků o 1170. Určete původní počet prvků.

9. Zmenšíme-li počet prvků o 27, zmenší se počet variací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků desetkrát. Určete původní počet prvků.

10. Kolika způsoby lze postavit 20 žáků do jedné řady při nástupu na tělocvik?

11. Kolika způsoby lze postavit do řady na poličku 10 různých knih českých a 5 různých anglických tak, že nejprve budou knihy české a vedle nich knihy anglické.

12. Kolik přímek určuje deset různých bodů v rovině, z nichž
a) žádné tři neleží v přímce,
b) právě šest leží v přímce?

13. Kolik rovin je určeno 15 různými body, jestliže
a) žádné čtyři neleží v jedné rovině,
b) právě pět z nich leží v jedné rovině?

14. Ve třídě je 30 žáků. Kolika způsoby lze vybrat čtveřici žáků na zkoušení?

15. Kolika způsoby lze 4 dívky a 8 chlapců rozdělit na dvě šestičlenná volejbalová družstva tak, aby v každém družstvu byla 2 děvčata a 4 chlapci?

16. Test přijímací zkoušky se skládá za 10 otázek z chemie, z 10 otázek z biologie a z 10 otázek z fyziky. V každém předmětu je vybíráno ze 200 navržených otázek. Kolik je možností sestavit test? (Na pořadí nezáleží.)

17. Z kolika prvků lze vytvořit 990 kombinací druhé třídy bez opakování?

18. Zvětší-li se počet prvků o 4, zvětší se počet kombinací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků o 30. Určete původní počet prvků.

19. Zvětší-li se počet prvků o 15, zvětší se počet kombinací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků třikrát. Určete původní počet prvků.

20. Zvětší-li se počet prvků množiny o 2, zvětší se počet permutací jejích prvků dvanáctkrát. Určete počet prvků množiny.

21. Kolika způsoby lze rozdělit 9 zaměstnanců do 3 různých místnosti tak, aby v první místnosti byli 4 pracovníci, ve druhé 2 a ve třetí byli 3 pracovníci?

22. Fotbalové mužstvo má tři brankáře, pět obránců, čtyři záložníky a deset útočníků. Kolik různých mužstev může trenér sestavit, jestliže mužstvo se skládá z jednoho brankáře, čtyř obránců, dvou záložníků a čtyř útočníků.

23. Ve třídě je 19 chlapců a 16 dívek. Kolika způsoby je možné vybrat do soutěže 4 studenty tak, aby ve vybrané skupině byli:
a) pouze chlapci
b) jedna dívka a tři chlapci
c) dvě dívky a dva chlapci.

24. Na taneční zábavě sedí u jednoho stolu 5 chlapců a 6 dívek. Určete kolika způsoby lze z nich vytvořit:
a) právě 3 taneční páry
b) právě 4 taneční páry
c) právě 5 tanečních párů chlapec - dívka.

25. Řešte rovnice s neznámou $n \in \mathbb{Z}$:

a) $\frac{n!}{(n-2)!}=4n$

b) $\frac{10-17n}{(n+1)!}+\frac{4}{(n-1)!}=0$

c) $\frac{(n+6)!}{(n+4)!}n.\frac{(n-4)!}{(n-5)!}=5n+80$

d) $\frac{(n-3)!+(n-1)!}{(n-2)!}=3$

26. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $\binom{10}{4}x=\binom{12}{6}$

b) $\binom{x-2}{2}=3$

c) $\binom{x}{2}+\binom{x+3}{1}=4$

d) $\binom{x-1}{x-2}+\binom{x-2}{x-4}=4$

e) $\binom{x-1}{x-3}+\binom{x-2}{x-4}=9$

f) $\binom{x}{x-2}+\binom{x}{x-1}=\frac{x^2+1}{2}$

g) $\binom{10}{1}\binom{x}{x-2}-\binom{x+3}{x+1}=15\binom{x}{0}$

h) $\binom{x-1}{x-3}-2.\binom{x-2}{x-4}=0$

27. Řešte nerovnice s neznámou $n \in \mathbb{Z}$:

a) $72n!<(n+2)!$

b) $(n+2)!.(24+6n)\leq(n+4)!$

c) $(n+1)!+(n+2)!\leq(n+3)!$

d) $\frac{n!}{(n-2)!}+24\geq 10n$

e) $n-\frac{(n-2)!}{(n-4)!}\geq -1$

f) $\frac{n!}{(n-2)!}-3n\leq\frac{(n+4)!}{(n+3)!}+2$

28. Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $\binom{x-2}{x-4}x+3\geq 4x$

b) $\binom{x+1}{x}+2x<50$

c) $\binom{x+4}{2}\geq\binom{x-4}{2}$

d) $\binom{x+1}{x-1}-\binom{x}{x}.\binom{8}{5}\leq 44$

e) $\binom{8}{x} < 2\binom{8}{x-1}$ f) $\binom{7}{x+1} \leq \binom{7}{x} . 2$

29. Upravte a určete podmínky pro *n*:

a) $\dfrac{7!+6!+5!}{8!-7!}$ b) $\dfrac{n!(n+1)!}{(n-1)!(n+2)!}$

c) $\dfrac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2}$ d) $\dfrac{(n-3)!(n^2-1)}{(n-1)!}$

e) $\dfrac{4-n^2}{(n+2)!}+\dfrac{n}{(n+1)!}$ f) $\dfrac{2}{(n-1)!}-\dfrac{2n^2+n}{(n+1)!}$

g) $\dfrac{2}{n!}-\dfrac{2n}{(n+1)!}-\dfrac{2n+4}{(n+2)!}$ h) $\dfrac{(n+2)!}{n!}-2.\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}+\dfrac{n!}{(n-2)!}$

30. Zjednodušte a vypočítejte:

a) $\binom{8}{6}$ b) $\binom{16}{10}$ c) $\binom{185}{184}$

d) $\binom{n+2}{2}$ e) $\binom{n+3}{n}$ f) $\binom{n+2}{n-2}$

g) $\binom{15}{3}+\binom{8}{5}-\binom{15}{12}$ h) $\binom{9}{8}-\binom{9}{6}+\binom{9}{4}-\binom{9}{2}$

9. KRUŽNICE, KRUH, KOULE, KULOVÁ PLOCHA

kružnice, kruh, kulová plocha a koule jako množina bodů, středový a obvodový úhel příslušný témuž oblouku kružnice, kružnice jako kuželosečka, středová a obecná rovnice kružnice, vzájemná poloha kružnice a přímky, kulová plocha, povrch a objem koule a jejich částí (kulová úseč a výseč, kulový pás a kulový vrchlík)

1. Je dána kružnice $k(S;r=3\,cm)$ a bod *M*, $|MS|=5\,cm.$ Sestrojte tečny z bodu *M* a vypočítejte jejich délky.

2. Je dána kružnice $k(S;r=4\,cm)$ a bod *O* uvnitř kružnice, $|OS|=1{,}5\,cm.$ Sestrojte všechny kružnice se středem *O*, které se dotýkají kružnice *k*.

3. Sestrojte kružnice k_1, k_2, k_3, které mají poloměry r_1 = 5,5 cm, r_2 = 2,5 cm, r_3 = 1,5 cm tak, aby
a) měly navzájem vnější dotyk
b) kružnice $k_1, k_2,$měly vnitřní, $k_1, k_3,$vnitřní a k_2, k_3 vnější dotyk.

4. V pravidelném osmiúhelníku *ABCDEFGH* vypočítejte velikosti vnitřních úhlů v trojúhelnících:
a) *ABG* b) *ACE* c) *BEH*

5. Vypočítejte velikost vnitřních úhlů v trojúhelníku, který dostanete, spojíte-li na ciferníku hodinek body vyznačující 1, 5, 8.

6. Vypočítejte obvod pravidelného sedmiúhelníku, je-li dána délka jeho nejkratší úhlopříčky *u* = 14,5 cm.

7. Délky dvou soustředných kružnic jsou 26 cm a 18 cm. Určete obsah mezikruží vytvořeného těmito kružnicemi.

8. Obvod kruhové výseče, která je částí kruhu o poloměru 12 cm, je 39 cm. Vypočítejte její obsah.

9. Kruhová výseč má obvod 17 cm, obsah 17,5 cm^2. Určete její poloměr a příslušný středový úhel.

10. Do kružnice o poloměru *r* = 19 mm je vepsán pravidelný šestiúhelník. Vypočítejte obsah kruhové úseče ohraničené stranou šestiúhelníku a kružnicí.

11. Napište analytické vyjádření útvarů:
a) kružnice se středem *S* [-1; 3] a poloměrem *r* = 3
b) vnitřní oblast kružnice se středem *S* [2; 0] a poloměrem $r=2\sqrt{3}$
c) vnější oblast kružnice se středem *S* [-5; -2] a poloměrem $r=3\sqrt{2}$
d) kruhu se středem *S* [0; 5] a poloměrem *r* = 2

12. Napište rovnici kružnice, která má střed *S* [6; 7] a
a) prochází bodem *A* [0; 9]
b) dotýká se přímky $p:5x-12y-24=0$
c) dotýká se souřadnicové osy *y*

13. Napište rovnici kružnice, která má střed na přímce $p:3x-4y=0$ a prochází body *A* [5; 3], *B* [6; 2].

14. Najděte souřadnice středu a poloměru kružnice, jejíž rovnice je:
a) $x^2+y^2-6x+4y-23=0$ b) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$
c) $x^2+y^2+8y=9$ d) $x^2+y^2+2x=5$
e) $x^2+y^2+6x-8y+13=0$ f) $x^2+y^2+\sqrt{8}x-\sqrt{12}y=9$

15. Zjistěte, pro které hodnoty parametru *p* jsou dané rovnice rovnicemi kružnice. Určete souřadnice středu kružnice a její poloměr:
a) $x^2+y^2+4x-6y+p=0$ b) $x^2+y^2-2x+10y+p=0$

c) $x^2+y^2-x-2y+p=0$ d) $x^2+y^2-3x+5y+p=0$

16. Napište rovnici kružnice opsané trojúhelníku ABC:
a) A [-1; 3], B [0; 2], C [1; -1] b) A [0; 0], B [3; 0], C [0; 4]
c) A[4; 3], B[2;–1], C[–5; 6]

17. Napište středový tvar rovnice kružnice, která má střed v průsečíku přímek $p: x+2y-8=0$ a $q: 2x+y-1=0$ a prochází bodem $A[-5; 9]$.

18. Určete reálné číslo $c\in\mathbb{R}$ tak, aby přímka $x+2y+c=0$ byla
a) sečnou b) tečnou c) vnější přímkou
kružnice $x^2+y^2=4$.

19. Určete vzájemnou polohu přímky p a kružnice k:
a) $p: 2x-y-6=0, k: x^2+y^2-4x-5y-1=0$
b) $p: x+y-8=0, k: x^2+y^2+18x+14y+114=0$
c) $p: 2x-y=0. k: x^2+y^2-3x+2y-3=0$

20. Určete souřadnice společných bodů kružnic daných rovnicemi:
a) $x^2+y^2=25, x^2+y^2+8x+4y-65=0$
b) $(x-1)^2+(y+6)^2=49, x^2+y^2+4x+6y-12=0$

21. Vypočítejte délku tětivy, kterou vytíná kružnice $x^2+y^2=25$ na přímce $3x+4y+15=0.$

22. Určete rovnice tečen kružnice k v jejím bodě T:
a) $k: x^2+y^2=25, T\left[3, y_0\right]$
b) $k: (x-3)^2+(y+5)^2=20, T\left[x_{0,}-3\right]$

23. Napište rovnice tečen kružnice k, které jsou rovnoběžné s přímkou p:
a) $k: (x-2)^2+(y+6)^2=13, p: 2x-3y+5=0$
b) $k: x^2+y^2-5x+7y+1{,}5=0, p: 4x+y-7=0$

24. Napište rovnici kulové plochy se středem S [1; 3; -5] procházející bodem A [2; 1; 1].

25. Určete střed a poloměr kulové plochy, která má rovnici:
a) $x^2+y^2+z^2-6x+10y-4z+22=0$
b) $x^2+y^2+z^2-4x+7y-3z=0$
c) $x^2+y^2+z^2-4x+6y-z-2=0$

26. Určete, pro které hodnoty parametru $m\in\mathbb{R}$, pro něž daná rovnice vyjadřuje kulovou plochu:
a) $x^2+y^2+z^2-4x+2z+m=0$
b) $x^2+y^2+z^2+2mx-6y+1=0$

27. Napište rovnici kulové plochy se středem S [4; 3; -1], která se dotýká roviny $\sigma: 2x+6y+3z+5=0.$

28. Napište rovnici roviny, která se dotýká kulové plochy $x^2+y^2+z^2-4x+6y-10z=0$ v bodě A [-4; -4; 4].

29. Určete obecnou rovnici kulové plochy, která prochází body A [2; -1; 0], B [5; 0; -4], C [0; -3; -2], D [3; 6; -6].

30. Je dána přímka $p: x=4, y=1-6t, z=4-6t, t\in\mathbb{R},$ a bod S [-6; 6; 5]. Najděte rovnici kulové plochy, která má střed v bodě S a s přímkou p má jeden společný bod.

31. Určete půsečíky kulové plochy $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ se souřadnicovými osami.

32. Určete vzájemnou polohu přímky $p: x=9+4\mathrm{t}, y=1+t, z=-2-3t, t\in\mathbb{R}$ a kulové plochy $x^2+y^2+z^2+28x-22y+24z-164=0$.

33. Kulové kapky o poloměrech 3 mm a 5 mm se spojí v jedinou kapku. Určete její poloměr.

34. Železná koule má hmotnost 100 kg a hustotu $\rho = 7600\ \mathrm{kg.m^{-3}}$. Vypočítejte její povrch a objem.

35. Jaká je přibližná délka vlny, která je namotána na klubku tvaru koule o poloměru 8 cm, je-li průměr vlny 1 mm?

36. Kulová úseč má objem 850 cm^3 a výšku 5 cm. Určete poloměr koule, jejíž částí je daná úseč.

37. Ze tří koulí o poloměrech r_1 = 3 cm, r_2 = 4 cm, r_3 = 5 cm vyrobili jednu kouli. Určete její poloměr a povrch.

38. Do koule o poloměru x cm je vepsán válec, jehož poloměr podstavy je o 2 cm a výška o 1 cm menší než poloměr koule. Určete poloměr koule.

39. Jak velkou část zeměkoule (km^2) vidí letec z výšky 10 km nad povrchem Země.

40. Miska tvaru polokoule je naplněna vodou do výšky 10 cm. Průměr misky je 28 cm. Kolik litrů vody miska obsahuje?

41. Vypočítejte objem koule s co největším poloměrem, kterou lze vyrobit z krychle o velikosti hrany a = 12 cm. Dále vypočítejte procento odpadu.

42. Jakou délku zemského poledníku představuje 1° zeměpisné šířky?

43. Kolik km^2 leží v mírném pásu na severní polokouli (mezi 23°27´ a 66°18´ severní šířky)?

44. Dokažte vzorec pro výpočet objemu koule.

10. LOGARITMICKÁ A EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE, ROVNICE A NEROVNICE

definice, vlastnosti a graf logaritmické a exponenciální funkce, vztah mezi logaritmickou a exponenciální funkcí, logaritmus, pravidla pro počítání s logaritmy, metody řešení logaritmických a exponcenciálních rovnic a nerovnic

1. Načrtněte grafy funkcí a určete definiční obor a obor hodnot funkce, průsečíky grafu s osou x a s osou y:

a) $y=\log_2(x+4)$ b) $y=\log_2(x+4)-1$

c) $y=|\log_2(x+4)-1|$ d) $y=|\log_2(x+4)|-1$

e) $y=\log_2|x+4|-1$ f) $y=\log_2(|x|+4)-1$

g) $y=2^x-4$ h) $y=2^{x+1}-4$

i) $y=-(2^{x+1}-4)$ j) $y=|2^{x+1}-4|$

k) $y=2^{|x+1|}-4$ l) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-1$

2. Určete definiční obory funkcí:

a) $y=\log_3(x+6)$ b) $y=\log(x^2-4)$

c) $y=\frac{1}{\log x-1}$ d) $y=\frac{1}{\log_2(x+7)-1}$

e) $y=\log(|x+1|-7)$ f) $y=\sqrt{\log(x+3)}$

g) $y=\log\frac{x}{2x-1}$ h) $y=\sqrt{\log_{0,2}\frac{x+5}{x}}$

3. Rozhodněte, jaký vztah platí mezi čísly p a r, jestliže platí:

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^p<\left(\frac{3}{7}\right)^r$ b) $\left(\frac{8}{5}\right)^p<\left(\frac{8}{5}\right)^r$ c) $\left(\frac{3}{4}\right)^p<\left(\frac{3}{4}\right)^r$

d) $\left(\frac{4}{3}\right)^p>\left(\frac{4}{3}\right)^r$ e) $\left(\frac{3}{7}\right)^p>\left(\frac{3}{7}\right)^r$ f) $\left(\frac{3}{4}\right)^p=\left(\frac{3}{4}\right)^r$

4. Vypočítejte:

a) $\log_4 16^{-0,5}$

b) $\log_{10}1500-\log_{10}15$

c) $\log_2 8-\log_2 2+\log_2 32$

d) $4\log_6 3+5\log_6 2-\log_6 12$

e) $2\log_5 25+3\log_2 64+\log_3\frac{1}{9}$

f) $(\log 0{,}1+3\log\sqrt{10}).\log 100$

g) $\log_5\frac{1}{25}-(\log_{\frac{1}{3}}9)^2+\log_{\frac{1}{2}}4^2$

5. Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí:

a) $\log_{1,5}x<\log_{1,5}5$ b) $\log_{0,7}(x+1)\le\log_{0,7}\frac{1}{3}$

6. Řešte exponenciální rovnice s neznámou $x\in\mathbb{R}$:

a) $2^{3x-1}.4=8^{x+1}.\left(\frac{1}{2}\right)^x$ b) $0{,}25.\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}=1$

c) $5^x.2^x=100^{x-1}$ d) $\frac{81}{16}=\left(\frac{2}{3}\right)^x.\left(\frac{9}{4}\right)^{x+1}$

e) $3^x+3^{x+1}=108$ f) $2^{x+1}+2^{x-1}+2^{x+3}=\frac{21}{8}$

g) $7.4^{-x+2}=3.4^{-x+3}-5$

h) $4^{2x}-6.4^{x}+8=0$

i) $\frac{1}{4}.2^{x}+\frac{1}{2}.4^{x}=9$

j) $3^{x}+3^{x+1}=7.4^{x}-4^{x+1}$

k) $2^{x-1}-2^{x-2}=5^{x-3}+2^{x-3}$

l) $5^{x-1}=10^{x}.2^{-x}.5^{x+1}$

m) $4.3^{x+1}-72=3^{x+2}+3^{x-1}$

7. Řešte logaritmické rovnice s neznámou $x\in\mathbb{R}$:

a) $\log_2(x+1)=3$

b) $4\log_3(2x-1)=12$

c) $\log_2\log_3\log_{\frac{1}{2}}x=0$

d) $\log_{\frac{1}{2}}\log_3(1+20\log_2 x)=-2$

e) $\log_5(x^2+2x)=\log_5(-3x)$

f) $\log x=2\log 5+\log 4$

g) $\dfrac{\log_3 x}{1+\log_3 2}=2$

h) $\log_6(x+1)+\log_6 x=1$

i) $\log_2(x+7)-\log_2 x=3$

j) $\log_8\sqrt{x+30}+\log_8\sqrt{x}=1$

k) $\log_4(3x+2)-2\log_4 x=2-\log_4 8$

l) $\log_2^2 x+2\log_2 x-3=0$

m) $x^{\log x}=100x$

n) $x^{\log x+2}=100x$

o) $1000x^2=x^{\log x}$

p) $x^{\log_7 x^2}=49x^3$

q) $\log_2(x^2+4x+3)=3$

r) $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8$

s) $3\log 2-\log(x-1)=\log(x+1)-\log(x-2)$

t) $2\log 3x^2+3\log 4x^3=4\log 2x^2+4\log 6x$

u) $\log_3[1+\log_3(2^x-7)]=1$

8. Řešte exponenciální nerovnice s neznámou $x\in\mathbb{R}$:

a) $3^{x-5}<0$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+2}\geq 0$

c) $3^{x-1}>9$

d) $4^{x}.2^{x}\leq 100$

e) $3^{x+4}\geq 3^{2x-1}$

f) $\left(\frac{1}{6}\right)^{x^2}<\left(\frac{1}{6}\right)^{2x+8}$

g) $2^{x}.2^{x+1}<2^{x+3}$

h) $3^{x+1}+3^{x+2}<36$

i) $2^{x}-3^{x}>2^{x+2}-3^{x+1}$

j) $25^{x}-9.5^{x}+20<0$

k) $2^{x+2}-2^{x+1}+2^{x-1}-2^{x-2}\leq 9$

9. Řešte logaritmické nerovnice s neznámou $x\in\mathbb{R}$:

a) $\log_5(x^2-2x+1)\geq 0$

b) $\log_{\frac{4}{7}}(4x^2+3x)>0$

c) $\log_{0,3}\dfrac{x+7}{2-x}\geq 0$

d) $\log_3(2x-1)>\log_3(4x+3)$

e) $\log_{0,2}(x-3)>\log_{0,2}x-\log_{0,2}2$

f) $\log_{\frac{1}{3}}(x+4)-\log_{\frac{1}{3}}(5x-4)\leq 0$

g) $\log_8(x^2-4x+3)<1$

h) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+4)>-2$

i) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\geq -2$

j) $\log(x+2)<2-\log(2x-6)$

11. MATEMATICKÉ DŮKAZY

základní typy důkazů (přímý, nepřímý, spor), důkaz matematickou indukcí

1. Dokažte přímým, nepřímým důkazem a sporem, že pro každé přirozené číslo *n* platí:

a) $3|n \Rightarrow 6|(n^2-n)$

b) $2\nmid n^3 \Rightarrow 4\nmid n$

c) $3|(n-1) \Rightarrow 9|(n^2+4n-5)$

2. Přímým důkazem dokažte, že v každém trojúhelníku je součet všech jeho vnitřních úhlů roven 180°.

3. Dokažte sporem, že pro všechna přirozená čísla *n* platí: jestliže je číslo n^2 sudé, je sudé i číslo *n*.

4. Dokažte přímo nerovnost: $\sqrt{10-\sqrt{11}}<\sqrt{10+\sqrt{11}}-1$

5. Dokažte sporem nerovnost: $1+\sqrt{15-\sqrt{15}}<\sqrt{15+\sqrt{15}}$

6. Dokažte matematickou indukcí, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí:

a) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

b) $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

c) $6|(n^3+11n)$

d) $6|(n^3+5n)$

7. Dokažte, že funkce:

a) $f_1 := 2x-1$ je rostoucí v $\mathbb{R}$

b) $f_2 := -3x+6$ je klesající v $\mathbb{R}$

8. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ jsou definovány uvedené rovnosti, a pak je dokažte:

a) $\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x . \cos x}=2$

b) $\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2 x$

c) $\frac{1}{\sin^2 x}=1+cotg^2 x$

d) $\frac{1}{\cos x}-\sin x . tg\, x=\cos x$

e) $\frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}=cotg\, x$

f) $\frac{\sin 2x}{\cos 2x-\cos^2 x}=-2\,cotg\, x$

g) $\sin 75° = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

h) $\cos 105° = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

9. Dokažte, že platí následující rovnosti:

a) $\sqrt{5.\sqrt[3]{\frac{1}{5}}.\sqrt[4]{5}}=5^{\frac{11}{24}}$

b) $\frac{\sqrt[3]{a.\sqrt{a^3}}}{\sqrt{a.\sqrt[3]{a^2}}}=1$ pro $a>0$

10. Dokažte, že dané vektory *u, v* jsou nazvájem kolmé:

a) $u = (2;4)$
$v = \left(-3;\frac{3}{2}\right)$

b) $u = (4;-1;13)$
$v = (5;-6;-2)$

11. Dokažte, že dané přímky:

a) $p=\{[1+2t;2-3t]\, t\in\mathbb{R}\}$
$q=\{[17+4k;-6-2k]\, t\in\mathbb{R}\}$ jsou různoběžné

b) $p=\{[2t;3-t;4-t]\, t\in\mathbb{R}\}$
$q=\{[2-k;-1+k;6+2k]\, t\in\mathbb{R}\}$ jsou mimoběžné

12. Dokažte, že body $A[2;4;15]$ $B[0;-1;-6]$ $C[-1;2;0]$ určují rovinu a napište její parametrické vyjádření.

13. Dokažte, že daná rovnice:

a) $y^2-4x+4=0$ vyjadřuje parabolu

b) $x^2+y^2-2y-3=0$ vyjadřuje kružnici

c) $x^2-2y^2+4x+12y-23=0$ vyjadřuje hyperbolu

d) $2x^2+3y^2+12x-6y+9=0$ vyjadřuje elipsu

14. Dokažte, že platí rovnosti v $\mathbb{C}$:

a) $\frac{2+i}{i}+\frac{i}{i+1}-\frac{2i+1}{i-1}=1-6i$

b) $\left|\frac{4-2i}{3+i}\right|=\sqrt{2}$

15. Dokažte platnosti následujících rovností pro $n\in\mathbb{N}$:

a) $\frac{n}{(n-3)!}-\frac{1}{(n-4)!}=\frac{3}{(n-3)!}$, $n\geq 4$

b) $\frac{(n+5)!}{(n+3)!}-2.\frac{(n+4)!}{(n+2)!}+\frac{(n+3)!}{(n+1)!}=2$

16. Dokažte následující limity:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-6}{x^3+3x^2+2x}=-\frac{5}{2}$

b) $\lim_{x\to \pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}=2$

c) $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2+1}{x^2+x-2}=3$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x.\sin x}=2$

e) $\lim_{x\to \infty}\frac{2^{x+3}+4}{2^{x-1}+1}=16$

17. Dokažte, že funkce $y=\frac{2x+3}{x-6}$ nemá ve svém definičním oboru extrém.

18. Užitím l´Hospitalova pravidla dokažte následující limity:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}=\frac{5}{3}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{3x^3-4x^2+x}{4x^3+x}=1$

c) $\lim_{x\to \pi}\frac{\cos x+1}{x-\pi}=0$

19. Dokažte správnost následujících integrálů:

a) $\int (x^3+x^2-2x)\,dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2+C$

a) $\int (x^2+4x)^2\,dx=\frac{1}{5}x^5+2x^4+\frac{16}{3}x^3+C$

b) $\int \sin^5 x\,dx=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$

c) $\int \frac{1}{x+1}\,dx=\ln|x+1|+C$

12. MOCNINY A MOCNINNÉ FUNKCE

definice mocniny s přirozeným, celým a racionálním exponentem, vzorce pro úpravu výrazů s mocninami a odmocninami, usměrňování zlomků, přehled mocninných funkcí a jejich vlastnosti, binomická věta, Moivreova věta a umocňování komplexního čísla

1. Vypočítejte:

a) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}).(\sqrt{12}-\sqrt{8})$

b) $(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}).(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3})$

c) $\dfrac{\sqrt{3}.\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}.\sqrt{12}}{\sqrt{6}.\sqrt{24}}.\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

e) $(\sqrt{7}+4).\left(\dfrac{21}{2\sqrt{7}}-\dfrac{12}{\sqrt{7}+1}\right)$

f) $\dfrac{(1+\sqrt{5})^2-(1-\sqrt{5})^2}{4\sqrt{5}}$

g) $\sqrt{5.\sqrt[3]{\dfrac{1}{5}}.\sqrt[4]{5}}$

h) $\sqrt[6]{\dfrac{16}{\sqrt{2}}}.\sqrt[3]{\dfrac{8}{\sqrt{2}}}.\sqrt{2}$

i) $\dfrac{\left(15^{\frac{1}{3}}.27^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(25^{\frac{1}{4}}.9^{\frac{1}{8}}\right)^{-2}}:\dfrac{\sqrt{3\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[3]{3.\sqrt[4]{27}}}$

2. Částečně odmocněte:

a) $8\sqrt{50}+4\sqrt{32}-6\sqrt{162}$

b) $\sqrt[3]{128}+2\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{1024}$

3. Usměrněte zlomky:

a) $\dfrac{1}{3-\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{10}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$

4. Zjednodušte následující výrazy a určete, kdy mají smysl:

a) $\left(\dfrac{a^2b^{-3}}{c^{-2}d^3}\right)^{-1}\left(\dfrac{c^4d^{-1}}{a^{-3}b^2}\right)^2$

b) $[n^{-2}.3n^3.(6n)^{-1}]^{-2}:(2n^{-1})^0$

c) $\dfrac{(y^{\frac{1}{2}})^3.(y^2)^{\frac{1}{3}}}{y.y^{\frac{2}{3}}}$

d) $\dfrac{(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}.(x^{\frac{1}{6}})^{\frac{9}{4}}}{(x^{\frac{7}{2}})^{\frac{5}{6}}}$

e) $\dfrac{(xy)^{\frac{1}{2}}.(x^2y)^{-\frac{1}{3}}}{(xy^2)^{-\frac{2}{3}}}$

f) $\sqrt{z^3.\sqrt{z^2.\sqrt{z}}}$

g) $\sqrt{y.\sqrt[3]{\dfrac{1}{y}}.\sqrt[4]{y}}$

h) $\dfrac{\sqrt[3]{a.\sqrt{a^3}}}{\sqrt{a.\sqrt[3]{a^2}}}$

i) $\left(\dfrac{8-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}-\dfrac{8+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right).\dfrac{x^2-16}{4\sqrt{x}}$

j) $\dfrac{2}{1+\sqrt{x}}-\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{x+2}{1-x}$

k) $\sqrt[5]{\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}.x^{-1}}{\sqrt[3]{x}}\right)^{-3}}$

5. Načrtněte grafy funkcí:

a) $f_1 : y = \frac{(-x)^3 . (-x)^5}{x^4 . (-x)^2}$

b) $f_2 : y = \frac{x^2 . (-x)^{-4}}{x . (-x)^5} . \frac{-x^6}{x^{-2} . (-x)^{-3}}$

6. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

a) $3\sqrt{x+5} - 5 = x$

b) $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+1} = 2$

c) $\sqrt{-x-\sqrt{1-x}} = 1$

d) $\sqrt{7-2\sqrt{x}} = \sqrt{18-13\sqrt{x}}$

e) $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x-7} = 2\sqrt{x}$

f) $\sqrt{4+2x-x^2} = x-2$

g) $\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2} = 4$

7. Vypočítejte všechny čtvrté odmocniny s čísla -8.

8. Užitím Moivreovy věty umocněte a výsledek převeďte do algebraického tvaru:

a) $(1+i)^{10}$

b) $(-\sqrt{2} - i\sqrt{2})^4$

c) $(-\sqrt{3} + i)^6$

d) $(1-i)^5$

9. Vypočítejte a^5, jestliže $a = \frac{15-5i}{1+2i} - \frac{1-3i}{i} + (3+i)(-1+2i)$

10. Vypočítejte pátý člen binomického rozvoje $(1 + y)^{10}$.

11. Vypočítejte desátý člen binomického rozvoje $(2a + b)^{15}$.

12. Určete $x \in \mathbb{R}$ tak, aby pátý člen binomického rozvoje $\left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)^9$ byl roven 2016.

13. Který člen binomického rozvoje $\left(y^2 + \frac{1}{y}\right)^9$ obsahuje y^3?

14. V binomickém rozvoji $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x}\right)^{12}$ nalezněte absolutní člen.

13. MNOHOSTĚNY A ROTAČNÍ TĚLESA

řezy těles (krychle, jehlan), povrchy a objemy hranolu, jehlanu, rotačních těles (válec, kužel), komolých těles (komolý jehlan a komolý kužel)

1. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou:
a) ACS_{GH} b) $S_{FG}S_{GH}S_{AD}$ c) $S_{AD}S_{AB}S_{CG}$
d) $KLM: K \in AB \wedge |BK| = 3|AK|,\ L = S_{GH},\ M \in EH \wedge |HM| = 3|EM|$
e) $RST: R \in BF \wedge |BR| = 3|FR|,\ S = S_{AD},\ T \in CG \wedge |GT| = 3|CT|$

2. Je dána krychle $ABCDEFGH$, a = 4 cm. Vypočítejte obvod a obsah mnohoúhelníku, který je shodný s řezem krychle rovinou:
a) $KLM,\ K \in AE \wedge |EK| = 3|AK|,\ L = S_{BF},\ M \in CG \wedge |CM| = 3|GM|$
b) EGS_{AB}
c) $S_{CG}S_{EH}S_{AB}$

3. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4\,cm,\ v = 6\,cm$. Vypočítejte obvod a obsah mnohoúhelníku, který je shodný s řezem jehlanu rovinou:
a) BCS_{AV} b) $AS_{CD}S_{DV}$ c) $S_{AV}S_{CV}B$

4. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan s délkou podstavné hrany a = 6,5 cm, stěnovou výškou v_S = 7,5 cm. Vypočítejte objem a obsah pláště.

5. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan s objemem V = 212 cm^3 a délkou podstavné hrany a = 7,2 cm. Vypočítejte tělesovou v_t a stěnovou výšku v_S.

6. Vypočítejte objem a povrch pravidelného šestibokého jehlanu, jehož podstavná hrana měří 3 cm a délka boční hrany je 6 cm.

7. Vypočítejte objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož podstavná hrana měří 4 cm. Odchylka boční hrany od roviny podstavy je 60°.

8. V krychli $ABCDEFGH$, a = 4 cm spojte postupně vrcholy $ABCD$ se středem hrany EH, Vypočítejte objem jehlanu $ABCDS_{EH}$.

9. Pravidelný šestiboký hranol má výšku 3 dm a objem 18 dm^3. Určete jeho povrch.

10. Vypočítejte povrch a objem pravidelného trojbokého jehlanu s délkou podstavné hrany 5 cm. Odchylka boční hrany od roviny podstavy je 40°.

11. Délky hran čtyřbokého hranolu jsou v poměru $a:b:c = 2:4:5$. Povrch hranolu je 57 cm^2. Vypočítejte jeho objem.

12. Vypočítejte povrch a objem pravidelného pětibokého jehlanu s délkou podstavné hrany 6 cm. Odchylka boční hrany od roviny podstavy je 50°.

13. Objem kvádru $ABCDEFGH$ se čtvercovou podstavou je 64 cm^3. Odchylka tělesové úhlopříčky AG od roviny podstavy je 45°. Vypočítejte jeho povrch.

14. Vypočítejte povrch a objem pravidelného šestibokého hranolu. Délka podstavné hrany je 4 cm, výška hranolu je 6 cm.

15. Vypočítejte délku podstavné hrany pravidelného pětibokého hranolu, jehož výška je stejná jako délka podstavné hrany. Objem hranolu je 100 cm^3.

16. Podstavná hrana pravidelného čtyřbokého hranolu je 10 cm. Tělesová úhlopříčka svírá s podstavnou hranou úhel 60°. Vypočtěte objem tělesa.

17. V bazénu tvaru kvádru je 1500 hl vody. Určete rozměry dna, je-li hloubka vody 250 cm a jeden rozměr dna je o 4 m větší než druhý.

18. Zděný pilíř obdélníkového průřezu s rozměry 51 cm a 77 cm má výšku 3,25 m. Vypočítejte potřebný počet cihel na jeho zhotovení, jestliže na 1 m^3 je jich zapotřebí 400 kusů.

19. Je dán rotační kužel s objemem 3 dm^3 a poloměrem podstavy $r = 1{,}5$ dm. Vypočítejte v, s, S.

20. Povrch rotačního kužele je 235,5 cm^2. Osovým řezem je rovnostranný trojúhelník. Vypočítejte objem tohoto kužele.

21. Hromada uhlí má tvar kužele o obvodu 31,5 m a straně 13 m. Kolik železničních vagónů potřebujeme na její odvezení, je-li hustota uhlí $\rho = 1{,}25$ $g.cm^{-3}$ a nosnost jednoho nagónu je 10 tun?

22. Vypočítejte objem a povrch komolého rotačního kužele, jehož dolní podstava má poloměr r, horní podstava má poloměr poloviční a výška je rovna $\frac{2}{3}r$.

23. Vypočítejte poloměr podstavy válce a obsah pláště, znáte-li jeho objem $V = 120$ cm^3 a výšku $v = 4$ cm.

24. Válcová cisterna má délku 8 m a obsahuje 400 hl benzínu. Jaký je její vnitřní průměr?

25. Obvod podstavy rotačního válce je tak velký jako jeho výška. Jaký je průměr dna a výška válce o objemu 1 litr?

26. Rotační kužel a válec mají společnou kruhovou podstavu, vrchol kužele je středem horní podstavy válce. Poměr povrchů válce a kužele je 7:4. Určete poměr objemů.

27. Rotační komolý kužel má poloměry podstav 17 cm a 5 cm, jeho strana má od roviny podstavy odchylku 60°. Určete
a) objem tohoto komolého kužele
b) objem a povrch kužele, z něhož tento komolý kužel vznikl.

28. Pravidelný komolý jehlan má podstavné hrany délek 6 cm a 4 cm. Boční stěna svírá s rovinou podstavy úhel 60°. Určete
a) objem tohoto komolého jehlanu
b) objem a povrch jehlanu, z něhož tento komolý jehlan vznikl.

29. Určete povrch a objem rotačního kužele o výšce v, jehož strana má od podstavy odchylku α.

30. Z kmene o průměru d a délce l vyřízneme největší možný trám čtvercového průměru. Kolik % tvoří odpad.

31. Dva rotační válce mají výšky 64 cm a 27 cm. Plášť každého z nich má stejný obsah jako podstava druhého válce. V jakém poměru jsou objemy obou válců.

32. Pravidelnému čtyřbokému jehlanu, jehož všechny hrany mají délku a je opsán rotační kužel. V jakém poměru jsou obsahy plášťů obou těles.

33. Při daném objemu V má rotační válec minimální povrch S. Určete rozměry válce.

34. Dokažte vzorec pro výpočet objemu rotačního kužele pomocí infinitezimálního počtu.

35. Vypočítejte objem rotačního tělesa rotujících kolem křivek $y=\sqrt{x}, x=0, x=4$ kolem osy x.

14. MNOHOÚHELNÍKY

klasifikace čtyřúhelníků podle: počtu dvojic rovnoběžných stran, podle možnosti opsat, popř. vepsat jim kružnici, souvislost mnohoúhelníků s řešením binomických rovnic, které útvary lze pokládat za konvexní

1. Vypočtěte velikosti zbývajících vnitřních úhlů:
a) konvexního čtvyřúhelníku, je-li $\alpha=70°, \beta=120°, \gamma=90°$
b) lichoběžníku, je-li $\alpha=50°, \gamma=120°$
c) rovnoběžníku, je-li $\alpha=80°$

2. Sestrojte následující čtyřúhelníky:
a) kosodélník $ABCD$, je-li dáno $|AB|=5\text{cm}, |BD|=6\text{cm}, |AC|=4{,}5\,cm$
b) kosočtverec $ABCD$, je-li dáno $|AC|=6\text{cm}, |AB|=4\text{cm}$
c) lichoběžník $ABCD$, je-li dáno $|AB|=6\text{cm}, |BC|=4\text{cm}, |CD|=|AD|=3\text{cm}$

3. Vypočítejte obsah obdélníku $ABCD$, je-li $|AC|=6\text{cm}$ a odchylka úhlopříček je 60°.

4. Vypočítejte obsah lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$), je-li dáno:
a) $|AB|=a=6\text{cm}, |CD|=c=4\text{cm}, v=3\text{cm}$
b) $|AB|=a=10\text{cm}, |CD|=c=6\text{cm}, |\sphericalangle BAD|=\alpha=60°, |\sphericalangle ABC|=\beta=60°$
c) $|AB|=a=66\text{mm}, |CD|=c=18\text{mm}, |\sphericalangle BAD|=\alpha=90°, a+36\text{mm}=b=|BC|$

5. Sestrojte kosodélník $ABCD$, pro který platí:
a) a = 4 cm, α = 60°, e = 5,5 cm
b) e = 5 cm, f = 3 cm, v_a = 2,5 cm

6. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), pro který platí:
a) b = 4 cm, v = 3,5 cm, e = 8 cm, f = 7 cm
b) b = 4 cm, c = 2 cm, α = 60°, f = 5 cm

7. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, pro který platí:
a) a = 6,5 cm, α = 60°, γ = 90°, δ = 105°, e = 8 cm
b) a = 5 cm, c = 3 cm, α = 75°, e = 4,5 cm, f = 5,5 cm

8. Vypočítejte obvod kosočtverce, jehož obsah je 288 cm^2 a jedna úhlopříčka má velikost 12,4 cm.

9. Lichoběžník $ABCD$ je dán základnou a = 24 cm, výškou v = 10 cm, obsahem S = 185 cm^2 a úhlem γ = 135° při vrcholu C. Určete velikost obvodu tohoto lichoběžníku.

10. Obdélníkový obraz s rozměry 40 cm a 60 cm má být zarámován rámem konstantní šířky. Obsah plochy rámu má být stejný jako obsah obrazu. Určete šířku rámu.

11. Vypočítejte obvod pravidelného sedmiúhelníku, je-li dána délka jeho nejkratší úhlopříčky u = 14,5 cm.

12. V pravidelném osmiúhelníku $ABCDEFGH$ vypočítejte velikosti vnitřních úhlů v trojúhelnících:
a) ABG b) ACE c) BEH

13. Vrcholy pravidelného patnáctiúhelníku jsou očíslovány 1, 2, ..., 14, 15. Vypočtěte velikosti všech vnitřních úhlů čtyřúhelníku s vrcholy 1, 7, 10, 14.

14. Vyřešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$ a řešení zobrazte v Gaussově rovině:
a) $x^3-1=0$ b) $x^3+8=0$
c) $x^4+1=0$ d) $x^6-64=0$
e) $x^2-i=0$ f) $x^2-2-2i\sqrt{3}=0$
g) $x^4+\frac{1-i}{i}=0$ h) $x^5+1-i\sqrt{3}=0$

15. Vypočítejte obsah rovnoběžníku $ABCD$ v rovině, jsou-li dány body $A[2; 1]$, $B[1; 3]$, $C[-2; -1]$.

16. Jsou dány body $A[-2; -2]$, $B[3; -3]$, $C[6; 1]$. Určete souřadnice bodu D tak, aby tyto čtyři body byly vrcholy rovnoběžníku $ABCD$.

17. Jsou dány body $A[-3; 1]$, $B[1; 4]$. Určete souřadnice bodů C, D tak, aby $ABCD$ byl čtverec.

18. Rozhodněte, zda útvar $ABCD$ je rovnoběžník. V kladném případě rozhodněte, zda jde o čtverec, obdélník, kosodélník či kosočtverec.
a) $A[4; 1]$, $B[6; 7]$, $C[0; 5]$, $D[-2; -1]$
b) $A[1; 2; 3]$, $B[4; 7; 9]$, $C[7; -2; -1]$, $D[4; -7; -7]$
c) $A[3; 5]$, $B[-5; 1]$, $C[-1; -2]$, $D[7; 2]$
d) $A[3; -1; 2]$, $B[1; 2; -1]$, $C[-1; 1; -3]$, $D[3; -5; 3]$
e) $A[0; 0]$, $B[3; -4]$, $C[6; 0]$, $D[3; 4]$
f) $A[2; 0; -2]$, $B[1; 2; -1]$, $C[-2; 0; 2]$, $D[-1; -2; 1]$

15. OBVODY A OBSAHY ROVINNÝCH ÚTVARŮ

základní rovinné útvary (trojúhelník, čtverec, obdélník, lichoběžník, rovnoběžník), souvislost určitého integrálu s obsahem rovinného obrazce

1. Vypočítejte obsah trojúhelníku *ABC,* jestliže je dáno:
a) $a = 26{,}43$ mm, $b = 37{,}56$ mm, $c = 41{,}62$ mm
b) $b = 72{,}5$ mm, $c = 56{,}7$ mm, $\alpha = 74°12'$

2. Vypočítejte obvod a obsah čtverce, jehož úhlopříčka $u = 6$ cm.

3. Vypočítejte obvod kosočtverce, jehož obsah je 288 cm^2 a jedna úhlopříčka má velikost 12,4 cm.

4. Všechny stěny kuchyně chceme obložit do výšky 1,2 m čtvercovými obkladačkami o straně 15 cm. V kuchyni jsou dvoje dveře, jejichž zárubně jsou široké 90 cm. Kolik obkladaček musíme koupit, jestliže počítáme s 5% ztrátou a rozměry obdélníkové podlahy jsou 3,2 m a 2,1 m?

5. Vypočítejte obsah a strany obdélníku, je-li velikost jeho úhlopříčky $u = 73{,}8$ cm a úhel úhlopříček $\omega = 36°$.

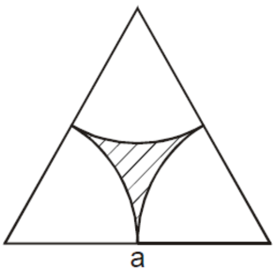
6. Vypočítejte velikost strany a rovnostranného trojúhelníku, je-li jeho obsah $S = 1732$ cm^2.

7. Základna rovnoramenného trojúhelníku je 20 cm, obsah $S = 240$ cm^2. Vypočítejte obvod tohoto trojúhelníku.

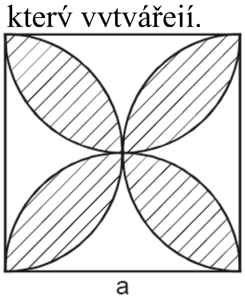
8. Lichoběžník *ABCD* je dán základnou $a = 24$ cm, výškou $v = 10$ cm, obsahem $S = 185$ cm^2 a úhlem $\gamma = 135°$ při vrcholu *C*. Určete velikost obvodu tohoto lichoběžníku.

9. V pravoúhlém trojúhelníku *ABC* je dána odvěsna $a = 36$ cm a obsah $S = 540$ cm^2. Vypočítejte velikost přepony c.

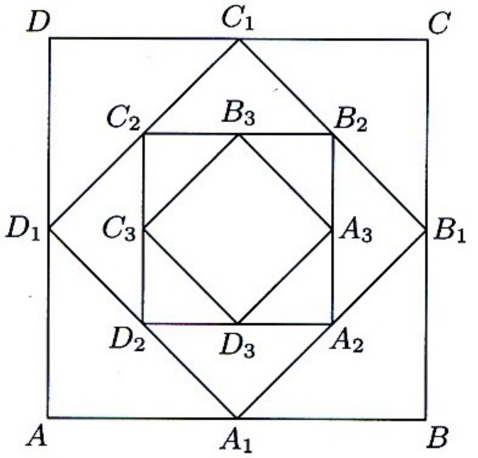
10. Je dán rovnostranný trojúhelník o straně délky a. Jeho vrcholy jsou středy kružnic o poloměrech $\frac{1}{2}a$. Určete obsah obrazce uvnitř trojúhelníku ohraničeného oblouky těchto kružnic.



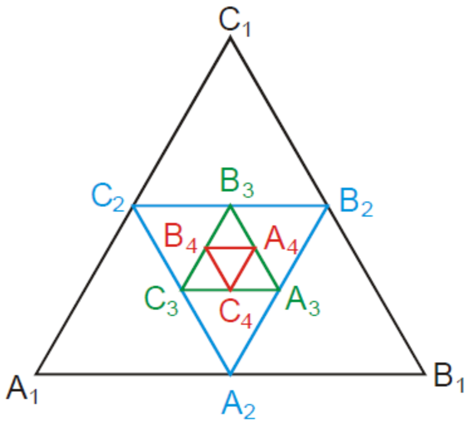
11. Nad stranami čtverce o straně délky a jsou sestrojeny uvnitř čtverce půlkružnice. Určete obsah obrazce, který vytvářejí.



12. Do čtverce *ABCD* o délce strany 1 je vepsán čtverec $A_1B_1C_1D_1$ tak, že A_1, B_1, C_1, D_1 jsou postupně středy stran *AB, BC, CD, DA*; obdobně vepíšeme čtverec $A_2B_2C_2D_2$ do čtverce $A_1B_1C_1D_1$ atd. Vypočtěte součet obvodů a součet obsahů všech takových čtverců.



13. Do rovnostranného trojúhelníku $A_1B_1C_1$ o délce strany 4 cm je vepsán druhý trojúhelník $A_2B_2C_2$ jehož vrcholy leží ve středech stran trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Podobným způsobem je do trojúhelníku a vepsán trojúhelník $A_2B_2C_2$, do trojúhelníku $A_3B_3C_3$ trojúhelník $A_4B_4C_4$ a tak dále až do nekonečna. Určete:
a) součet obvodů
b) součet obsahů
všech takto vzniklých trojúhelníků.



14. Obdélníkový obraz s rozměry 40 cm a 60 cm má být zarámován rámem konstantní šířky. Obsah plochy rámu má být stejný jako obsah obrazu. Určete šířku rámu.

15. Vypočítejte obsah kosočtverce, jehož výška je v = 48 mm a kratší úhlopříčka u_1 = 60 mm.

16. V kosočtverci, jehož obsah je 864 cm^2, je jedna úhlopříčka o 12 cm kratší než druhá. Určete délku strany a délky obou úhlopříček kosočtverce.

17. Vypočítejte obsah rovinného obrazce omezeného osou x a křivkou $y=3x-x^2$.

18. Vypočítejte obsah rovinného obrazce omezeného křivkami $y=\frac{1}{x}, y=0, x=1, x=4$.

19. Vypočítejte obsah rovinného obrazce omezeného křivkami $y=x^2, y=x$.

20. Vypočítejte obsah rovinného obrazce omezeného křivkami $y=x^2-1, y=3$.

21. Vypočítejte obsah rovinného obrazce omezeného křivkami $y=e^x, y=e^{-x}, x=\ln 2$.

16. PARABOLA

parabola jako kuželosečka, definice paraboly, základní pojmy a vlastnosti, středová a obecná rovnice paraboly, vzájemná poloha paraboly a přímky, parabola jako graf funkce

1. Napište rovnice parabol, které mají dáno ohnisko F a řídící přímku q:
a) F [4; 0], q: $y = 2$ b) F [5; -3], q: $y = -1$
c) F [-6; 4], q: $y = 6$ d) F [-3; -8], q: $y = -4$
e) F [2; 5], q: $x = 0$ f) F [4; 2], q: $x = 3$
g) F [6; 2], q: $x = 8$ h) F [-1; 3], q: $x = -0{,}5$

2. Určete ohnisko, vrchol a řídící přímku paraboly dané rovnicí:
a) $x^2+4y-6x+3=0$ b) $x^2+2x-2y+3=0$
c) $x^2++6x+3y+15=0$ d) $y^2-4x-4y+16=0$
e) $y^2+5x+2y+6=0$ f) $2y^2-11x+12y+73=0$
g) $x^2+2y-3=0$ h) $y^2-7x-6y-19=0$

3. Napište obecnou i vrcholovou rovnici paraboly:
a) hlavní osa je rovnoběžná s osou y a body A [0; 0], B [-1; -3], C [-2; -4] jsou body paraboly
b) hlavní osa je rovnoběžná s osou x a body A [-2; 5], B [3; 7], C [-6; 1] jsou body paraboly

4. Napište rovnici paraboly, znáte-li vrchol V [-4; -2] a víte-li, že prochází bodem A [-1; 2] a zároveň platí:
a) osa paraboly je rovnoběžná s osou x
b) osa paraboly je rovnoběžná s osou y

5. Napište rovnici paraboly, která prochází body A [1; 2], B [5; 2], C [-1; 5], D [7; 5].

6. Vypočítejte souřadnice společných bodů paraboly dané rovnicí $x^2-4y=0$ a přímky, která má rovnici
a) $x - y = 0$ b) $x + y = 0$ c) $x - 2y + 4 = 0$

7. Jako dlouhou tětivu vytíná parabola o rovnici $y^2-8x=0$ na přímce dané rovnicí $x-y-2=0$?

8. Je dána parabola o rovnici $4x=-y^2$ a bod M. Určete rovnice všech přímek, které procházejí bodem M a mají s parabolou právě jeden společný bod. Volte:
a) M [0; 0] b) M [-3; -1] c) M [0; 5] d) M [2; -1]

9. Určete rovnici tečny paraboly v jějím tečném bodě T:
a) parabola má rovnici $y=2x^2-5x+1, T[2; y_0]$
b) parabola má rovnici $x=-y^2+4y-7, T[x_0; -2]$

10. Napište rovnici tečny k dané parabole v jejím bodě A:
a) parabola má rovnici $y^2=2x, A[2;-2]$
b) parabola má rovnici $3y^2+x-12y+14=0, A[-2;2]$
c) parabola má rovnici $x^2+6x-2y+15=0, A[-3;3]$

11. Určete hodnotu parametru $c \in \mathbb{R}$ v rovnici přímky $p: 3x-2y-2c=0$ tak, aby přímka p měla s parabolou $y^2=9x$ právě jeden společný bod.

12. Určete směrnici k přímky $p: kx+\dfrac{3}{2}$ tak, aby přímka p byla tečnou paraboly $y^2=6x$.

13. Napište rovnice všech tečen paraboly $y^2-6x-6y+3=0$, které jsou kolmé k přímce $x+3y+2=0$.

14. Načrtněte grafy funkcí, určených předpisem:

a) $f_1: y=(x+2)^2-1$

b) $f_2: y=2-(x-1)^2$

c) $f_3: y+2=\frac{1}{2}(x-3)^2$

d) $f_4: y=x^2+2x-15$

e) $f_5: y=x^2-4x+6$

f) $f_6: y=4x^2+12x+9$

g) $f_7: y=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}$

h) $f_8: y=-x^2+2x-10$

15. Určete předpis pro kvadratickou funkci, jejímž grafem je parabola, která má vrchol v bodě V [2; -3] a prochází bodem A [0; 1].

16. Určete minimum funkce $f: y=x^2-6x+10$.

17. PARAMETR

diskuze řešení rovnic (lineárních, kvadratických) s parametrem, parametrické vyjádření přímky, polopřímky a úsečky v rovině, parametrické vyjádření roviny

1. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$ a s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

a) $\frac{x+a}{a}=ax-1$

b) $\frac{ax+1}{x-2}=\frac{ax-1}{x+2}$

c) $\frac{2-a}{a}=\frac{2}{x-1}$

d) $\frac{a}{x}-\frac{4}{ax}=1-\frac{2}{a}$

e) $1+\frac{a^2-1}{x}=a$

f) $\frac{a^2(x-1)}{ax-2}=2$

g) $ax-\frac{2}{a^2}=\frac{1}{a}(4x+1)$

h) $\frac{2}{a(x-3)}+\frac{3}{(a-1)(x+1)}=\frac{x-5}{a(x+1)(x-3)}$

i) $\frac{x-1}{x}=\frac{2-a}{3a}$

j) $\frac{3+a}{a}=\frac{3}{x-4}$

k) $\frac{x-a}{x+1}=a$

l) $\frac{4}{x-a}+2=\frac{a}{a-x}$

2. Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$ tak, aby řešením rovnice $2p(xp+1)-(p^2+1)x=2$ bylo kladné reálné číslo.

3. V rovnici $\frac{p}{x}+\frac{p+3}{2}=8+\frac{1}{x}$ určete hodnotu parametru $p \in \mathbb{R}$ tak, aby kořenem dané rovnice bylo číslo 2.

4. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$ a s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

a) $ax^2-2x+1=0$

b) $x^2-ax+1=0$

c) $x^2-2x-a+1=0$

d) $(a^2-1)x^2+2ax+1=0$

e) $\frac{2x+a}{x+2}-\frac{a}{x-2}=a$

f) $\frac{3}{x+a}+\frac{a-1}{x-a}=\frac{2a}{x}$

5. Je dána rovnice $(2a+3)x^2+x-a+4=0$. Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$, pro které je daná rovnice lineární.

6. Je dána rovnice $2x^2+(a+1)x+6=0$. Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$, pro které má daná rovnice dva různé reálné kořeny.

7. Je dána rovnice $x^2+ax+4+\frac{3}{2}a=0$. Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$, pro které má rovnice dvojnásobný kořen.

8. Je dána rovnice $x^2-2ax+2a^2-9=0$. Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$, pro které nemá rovnice v množině reálných čísel řešení.

9. Vyšetřete, pro které hodnoty parametru $t \in \mathbb{R}$ mají dané kvadratické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$ imaginární kořeny:

a) $x^2+2tx-t+2=0$

b) $2x^2+t=0$

c) $x^2+tx-1+t=0$

d) $tx^2-x+t=0$

10. Určete hodnotu parametru $m \in \mathbb{R}$ tak, aby přímka $x+my+2m^2-m-1=0$ procházela počátkem soustavy souřadnic.

11. Jsou dány dvě přímky $p: ax+y-4=0, q: x+2y+8=0$. Určete hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby přímky *p, q* byly navzájem kolmé.

18. POSLOUPNOSTI A ŘADY

aritmetická a geometrická posloupnost, vlastnosti aritmetické a geometrické posloupnosti, limita posloupnosti, nekonečné řady, periodická čísla

1. Vyšetřete, zda dané posloupnosti jsou monotónní:

a) $\{5n-7\}_{n=1}^{\infty}$ b) $\{-3n+2\}_{n=1}^{\infty}$

c) $\{n^2-10n\}_{n=1}^{\infty}$ d) $\{-2n^2+5\}_{n=1}^{\infty}$

e) $\left\{\frac{3}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ f) $\{n^2+3n-4\}_{n=1}^{\infty}$

2. Určete prvních pět členů dané posloupnosti a rozhodněte, je-li tato posloupnost omezená:

a) $\{2n+5\}_{n=1}^{\infty}$ b) $\{-2n^2-3\}_{n=1}^{\infty}$

c) $\{(-1)^n-1\}_{n=1}^{\infty}$ d) $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

e) $\left\{\frac{5n+2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ f) $\left\{\sin\frac{1}{2}\pi n\right\}_{n=1}^{\infty}$

3. Určete, od kterého členu jsou všechny další členy posloupnosti $\left\{\frac{1}{2+3n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ menší než $\frac{1}{1000}$.

4. Určete, která z daných posloupností je aritmetická, resp. geometrická; potom určete její diferenci, resp. kvocient:

a) $\{3n-4\}_{n=1}^{\infty}$ b) $\{2^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

c) $\{3.2^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ d) $\left\{\frac{n+1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

5. Dokažte, že daná tři čísla tvoří tři následující členy jisté
a) aritmetické posloupnosti: $\log 16, \log 8, \log 4$ a určete diferenci
b) aritmetické posloupnosti: $\sin 60°, \sin 0°, \sin(-60°)$ a určete diferenci
c) geometrické posloupnosti: $\sqrt{5}-\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}+\sqrt{2}$ a určete kvocient
d) geometrické posloupnosti: $\sin 2x, \cos x, \frac{1}{2} cotgx\, x, x \in (0, \pi)$ a určete kvocient

6. Určete $x \in \mathbb{R}$ tak, aby čísla a_1, a_2, a_3 tvořila tři následující členy aritmetické posloupnosti: $a_1 = \log(2x-1), a_2 = \log(4x-2), a_3 = \log(5x+2)$

7. Přičteme-li k daným číslům -6, 2, 26 reálné číslo *x*, dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Určete, které číslo musíme přičíst. Potom určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, která takto vznikne.

8. Určete $x \in \mathbb{R}$ tak, aby čísla a_1, a_2, a_3 tvořila tři následující členy geometrické posloupnosti:

a) $a_1 = 1, a_2 = 2^x, a_3 = 2^{x+2}+12$

b) $a_1=1+2\log x, a_2=3-4\log x, a_3=3+\log x$

9. A aritmetické posloupnosti je $a_1 = 20$, $d = 4$.
a) Kolikátý člen je roven číslu 100?
b) Kolikátý člen je roven číslu 150?

10. V geometrické posloupnosti je $a_1 = 64$, $q=\frac{1}{2}$. Kolikátý člen je roven číslu $\frac{1}{32}$?

11. Napište prvních pět členů aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a součet prvních deseti členů, je-li dáno:

a) $a_1=5, a_2=2$
b) $a_1=2, a_2=2+\sqrt{5}$
c) $a_2=7, d=-3$
d) $a_3=1, a_7=-7$
e) $a_1+a_6=16, a_3+a_4=19$
f) $a_1+a_4=26, a_2+a_5=30$
g) $a_4+a_5+a_7+a_8=10, \frac{a_{21}}{a_1}=2$

12. V aritmetické posloupnosti je dáno:
a) $a_1=2, a_n=32, s_n=187$; určete n, d
b) $a_1=0, d=3, s_n=165$; určete n
c) $a_4=0, a_6=-4, s_n=12$; určete n

13. Číslo 55 rozložte na součet několika čísel tak, aby každé následující bylo o 4 větší než předcházející a poslední bylo 19.

14. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Délka odvěsny má délku 24 cm. Určete délky zbývajících stran.

15. Teploty Země přibývá směrem do jejího středu o 1°C na 33 m. Jaká je teplota na dně dolu 1015 m hlubokého, je-li v hloubce 25 m teplota 9°C?

16. Napište prvních pět členů geometrické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, je-li dáno:

a) $a_1=-1, a_2=2$
b) $a_1=16, q=\frac{1}{2}$
c) $a_3=4\sqrt{3}, a_4=-8\sqrt{3}$
d) $a_3=8, a_6=64$
e) $a_2-a_1=15, a_3-a_2=60$
f) $a_1+a_2-a_4=-110, a_2+a_3-a_5=-220$
g) $a_8-a_4=360, a_7-a_5=144$

17. V geometrické posloupnosti je dáno:
a) $a_1=2, q=3, s_n=80$; určete n
b) $a_4=9a_2, s_4=80$; určete a_1, q
c) $a_1=5, a_n=640, s_n=1275$; určete q, n

18. Tři čísla, která tvoří následující členy aritmetické posloupnosti, mají součet 60 a součin 7500. Určete tato čísla.

19. V aritmetické posloupnosti známe $a_1=18, d=-5$. Určete $n\in\mathbb{N}$ tak, aby platilo: $a_n+a_{n+3}=-189$.

20. V geometrické posloupnosti známe $a_1=\frac{1}{64}, q=2$. Určete $n\in\mathbb{N}$ tak, aby platilo: $a_n+a_{2n}=8200$.

21. V aritmetické posloupnosti je $a_1=3, d=4.$ Kolik členů této posloupnosti musíme sečíst, aby součet byl větší než 250?

22. V geometrické posloupnosti s $q=2$ vypočítejte, kolik členů dává součet 186, jestliže poslední sčítanec je $a_n = 96$.

23. Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2-9x+8=0$ vložte dvě čísla tak, aby spolu s vypočtenými kořeny vznikly čtyři za sebou jdoucí členy geometrické posloupnosti.

24. Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-3}{n+1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-n^4}{5n^4-3n^2+3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-n^3}{5n^4+2n-1}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(3n-2)}{(1-n)(2+n)}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+...+n}{2n^2-3}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+2}+\dfrac{2n-n^2}{2n^2}\right)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^5+1}{2n^5+3n}\right)^4$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{(3n-1)^2}$

25. Vypočítejte:

a) $1+\dfrac{3}{4}+\dfrac{9}{16}+\dfrac{27}{64}+...$ b) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3+...$

c) $(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})^3+...$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{2-n}$

g) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{27}+...$ h) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{48}-...$

i) $5.\sqrt{5}.\sqrt[4]{5}.\sqrt[8]{5}....$ j) $2.\sqrt{2}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[8]{2}....$

26. Zjistěte, pro která $x\in\mathbb{R}$ je daná řada konvergentní, a potom součet určete:

a) $1+(2-x)+(2-x)^2+(2-x)^3+...$ b) $1+(x+3)+(x+3)^2+(x+3)^3+...$

c) $2+4x+8x^2+16x^3+...$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^2+7)^n$

27. V $\mathbb{R}$ řešte rovnice:

a) $1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}+\dfrac{16}{x^4}+...=\dfrac{4x-3}{3x-4}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{3}{x}\right)^{n-1}=\dfrac{8}{x+10}$

c) $27=2.(3^x+3^{x-1}+3^{x-2}+...)$ d) $x.\sqrt{x^3}.\sqrt[4]{x^3}.\sqrt[8]{x^4}....=16$

e) $\log x+\log\sqrt{x}+\log\sqrt[4]{x}+...=2$ f) $2^x+4^x+8^x+16^x+...=1$

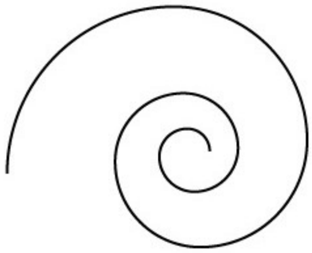
g) $(x+1).\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x+2)^{2n}=\dfrac{1}{3}$ h) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{12}{x^3}-...=\dfrac{x}{x+4}$

28. Užitím součtu geometrické řady vyjádřete zlomkem v základním tvaru:

a) $0,\overline{3}$ b) $0,2\overline{4}$ c) $1,0\overline{32}$

d) $25,6\overline{7}$ e) $\dfrac{0,4\overline{6}}{0,\overline{63}}$ f) $0,\overline{6}-0,6$

29. Spirála se skládá z polokružnic, z nichž první má poloměr 10 cm a každá následující má poloměr rovný dvěma třetinám poloměru předcházející polokružnice. Určete délku spirály.



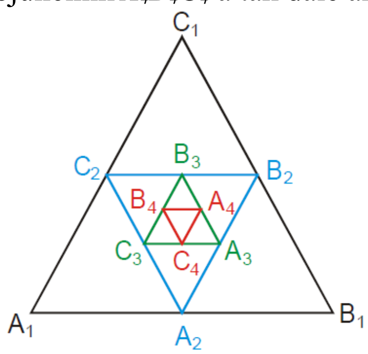
30. Spirála se skládá z polokružnic, poloměr první kružnice je 6 cm, poloměr každé další polokružnice je třikrát menší než poloměr polokružnice předcházející. Vypočítejte délku spirály.

31. Do rovnostranného trojúhelníku $A_1B_1C_1$ o délce strany 4 cm je vepsán druhý trojúhelník $A_2B_2C_2$ jehož vrcholy leží ve středech stran trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Podobným způsobem je do trojúhelníku a vepsán trojúhelník $A_2B_2C_2$, do trojúhelníku $A_3B_3C_3$ trojúhelník $A_4B_4C_4$ a tak dále až do nekonečna. Určete:

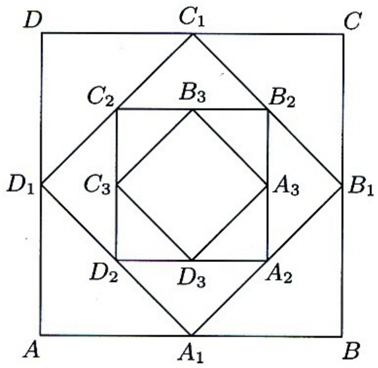
a) součet obvodů

b) součet obsahů

všech takto vzniklých trojúhelníků.



32. Do čtverce $ABCD$ o délce strany 1 je vepsán čtverec $A_1B_1C_1D_1$ tak, že A_1, B_1, C_1, D_1 jsou postupně středy stran AB, BC, CD, DA; obdobně vepíšeme čtverec $A_2B_2C_2D_2$ do čtverce $A_1B_1C_1D_1$ atd. Vypočtěte součet obvodů a součet obsahů všech takových čtverců.



19. PŘÍMKA A JEJÍ ČÁSTI

parametrické vyjádření přímky v rovině a prostoru, obecný a směrnicový tvar přímky v rovině, vzájemná poloha dvou přímek v rovině a prostoru, odchylka dvou přímek v rovině a prostoru, přímka jako graf funkce, přímka jako tečna grafu funkce

1. Přímka p je dána v jednotlivých případech různými způsoby. Sestavte parametrickou rovnici, obecnou rovnici a směrnicový tvar přímky (pokud tyto tvary existují):
a) přímka p je dána bodem A [4; 2] a směrovým vektorem (2; -1)
b) přímka p je dána bodem A [2; 0] a normálovým vektorem (-3; 2)
c) přímka p je dána dvěma body A [2; 3] a B [-2; -5]
d) přímka p prochází bodem A [-3; -1] a počátkem soustavy souřadnic
e) přímka p prochází bodem A [3; -2] kolmo k ose x
f) přímka p je dána bodem $A[1;2\sqrt{3}]$ a směrovým úhlem 120°
g) přímka p prochází bodem A [-2; 4] a má směrnici $k = 2$
h) přímka p protíná souřadnicové osy v bodech X [3; 0] a Y[0; -2] .

2. Napište parametrickou rovnici přímky p, která prochází počátkem soustavy souřadnic a je rovnoběžná s přímkou $q: 4x-y+3=0$.

3. Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem A [-4; 3] a je rovnoběžná s přímkou $q: 5x-2y+6=0$.

4. Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem A [-6; 5] a je kolmá na přímku $q: x-2y+9=0$.

5. Body A [2; 4] a B [4; -6] určují přímku AB. Napište obecnou rovnici přímky, která prochází středem úsečky AB a je kolmá na přímku MN, M [-4; -3] a N [1; -2].

6. Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem M [15; -3] a průsečíkem dvojice přímek $p: 3x-5y+12=0, q: 5x+2y-42=0.$

7. Napište obecnou rovnici přímky q, která prochází bodem M [-3; 5] a je rovnobežná s přímkou:
a) $p: 5x+2y-42=0$
b) $p: x=3-2t, y=t, t\in\mathbb{R}.$

8. Napište obecnou rovnici přímky q, která je kolmá na přímku p a prochází bodem A, jestliže:
a) $p: 2x-y-1=0, A[-3;3]$
b) $p: x=3+2t, y-4+5t, t\in\mathbb{R}; A[1;4].$

9. Napište rovnici přímky, která prochází průsečíkem přímek $x + y - 3 = 0$, $x - y + 7 = 0$ a je rovnoběžná s přímkou:
a) $2x - 3y + 9 = 0$ b) $y=-\frac{4}{5}x+\frac{17}{5}$ c) $x = 3 - t$, $y = 5 + 4t$, $t\in\mathbb{R}$

10. Je dán trojúhelník ABC, A [1; 4], B [3; -2], C [-4; -6]. Určete v parametrickém tvaru rovnici přímky, na které leží:
a) strana c b) výška v_c c) těžnice t_c
d) osa úsečky AB e) střední příčka rovnoběžná s AB

11. Napište obecnou rovnici přímky procházející body A [3; 1], B [-1; 4] a vypočítejte délku úsečky AB.

12. Určete souřadnice bodu P, který je souměrně sdružený s bodem Q [-2; -9] podle přímky $p: 2x+5y-38=0.$

13. Vyšetřete vzájemnou polohu trojice přímek $p: 3x-y-1=0, q: 2x-y+3=0,$ $r: x-y+7=0.$

14. Vyšetřete vzájemnou polohu přímek *p, q*. V případě různoběžných přímek vypočítejte souřadnice průsečíku přímek *p, q*.

a) $p=\{[1+2t;2-3t]t\in\mathbb{R}\},q=\{[17+4k;-6-2k]k\in\mathbb{R}\}$
b) $p=\{[1+2t;2-3t]t\in\mathbb{R}\},q=\{[1+4k;5-2k]k\in\mathbb{R}\}$
c) $p=\{[1+2t;2-3t]t\in\mathbb{R}\},q=\{[5+4k;-4-6k]t\in\mathbb{R}\}$
d) $p=\{[1+2t;2-3t]t\in\mathbb{R}\},q:2x+y-1=0$
e) $p:3x-2y+1=0,q:x=-1-t,y=4+t,t\in\mathbb{R}$
f) $p:x=-1-t,y=3,q:x=3-2s,y=2+s,s\in\mathbb{R}$

15. Je dán trojúhelník *ABC*, *A* [-1; 4], *B* [2; -2], *C* [5; -1]. Vypočítejte:
a) vnitřní úhel β trojúhelníku *ABC*
b) odchylku přímek *AB, BC*
c) odchylku osy úsečky *AB* a osy *x*
d) obsah trojúhelníku *ABC*

16. Vypočítejte odchylku daných přímek:
a) $p:3x-7=0,q:x+y+13=0$
b) $p:5x+3y-7=0,q:x=t,y=5+4t,t\in\mathbb{R}$
c) $p:4x-5=0,q:x=t,y=7,t\in\mathbb{R}$

17. Bodem *A* [3; 5] veďte přímku, která má od přímky $p: y=2x-1$ odchylku 45°.

18. Na přímce $p:3x-2y-6=0$ najděte bod *A* [x_A; y_A], který má od přímky $q:3x-4y+3=0$ vzdálenost 3.

19. Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem *P* a jejíž vzdálenost od bodu *Q* je *v*, jestliže:
a) *P* [6; 3], *Q* [2; 6] a $v = 5$
b) *P* [-2; 5], *Q* [3; 5] a $v=\sqrt{5}$

20. Vyšetřete vzájemnou polohu přímek *p, q* v prostoru. Jsou-li přímky různoběžné, určete souřadnice jejich průsečíku:
a) $p:x=14-7t,y=-3+5t,z=-5-3t,t\in\mathbb{R}$,
$q:x=2-2s,y=4+3s,z=8-3s,s\in\mathbb{R}$
b) $p:x=2+2t,y=1-2t,z=3-6t,t\in\mathbb{R}$,
$q:x=-s,y=3+s,z=3+3s,s\in\mathbb{R}$
c) $p:x=-2+2t,y=-4+t,z=1-6t,t\in\mathbb{R}$,
$q:x=7-3s,y=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}s,z=-2+9s,s\in\mathbb{R}$
d) $p:x=1+2t,y=-1-t,z=3-3t,t\in\mathbb{R}$,
$q:x=-1-s,y=1+s,z=-3+3s,s\in\mathbb{R}$

21. Vypočítejte vzdálenost bodu *A* od přímky *p*, jestliže:
a) *A* [6; -6; 5], $p:x=4,y=1-6t,z=4-6t,t\in\mathbb{R}$
b) *A* [3; -1; 4], $p:x=t,y=2+t,z=1-t,t\in\mathbb{R}$
c) $A[1;9;5],p=MN,M[1;2;4],N[0;5;5]$

22. Určete bod *M´* souměrný k bodu *M* podle přímky *AB*.
a) *A* [0; 0; -3], *B* [-6; -2; 1], *M* [5; 3; -1]
b) *A* [11; -2; 3], *B* [-1; 1; 0], *M* [5; 4; -3]

23. Jsou dány body *A* [5; 3; 6], *B* [-1; 7; -2], *C* [-9; -5; 4].
a) Napište parametrické vyjádření přímky *AB*.
b) Zjistěte, zda na přímce *AB* leží bod *C*.
c) Napište parametrické vyjádření přímky, která prochází bodem *A* a středem úsečky *BC*.
d) Napište parametrické vyjádření přímky procházející středy úseček *AB* a *AC*.

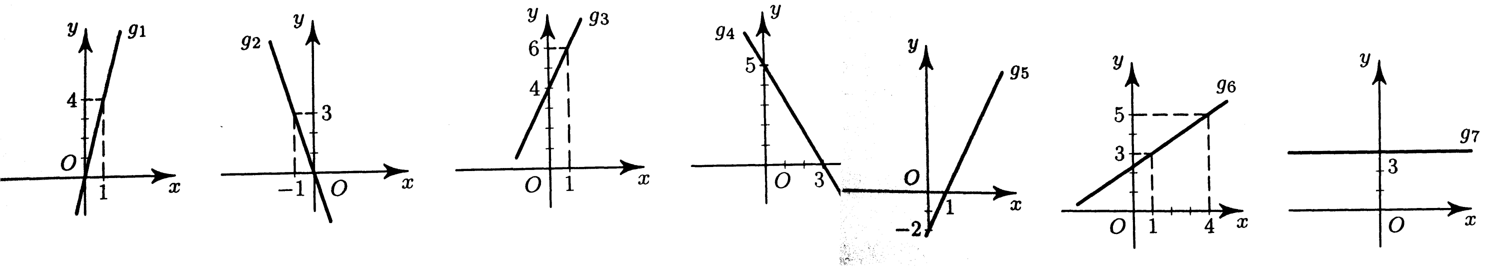
24. Vypočítejte odchylku přímek p, q.

a) $p=\{[2+2t;t;7-2t]\,t\in\mathbb{R}\},q=\{[4-k;5;-3+k]\,k\in\mathbb{R}\}$

b) $p=\{[2-2t;1+t;4-3t]\,t\in\mathbb{R}\},q=\{[1+k;1-k;4-k]\,k\in\mathbb{R}\}$

c) $p=\{[2+t;2t;-3t]\,t\in\mathbb{R}\},q=\{[1-k;2-2k;3+3k]\,k\in\mathbb{R}\}$

25. Funkční předpisy lineárních funkcí g_1 až g_7 zapište rovnicemi, jsou-li jejich grafy na obrázku.



26. Nakreslete grafy následujících funkcí:

a) $f_1(x): y=|x|+2$

b) $f_2(x): y=|x+2|$

c) $f_3(x): y=|x+2|-3$

d) $f_4(x): y=2|x-3|+1$

e) $f_5(x): y=|x+1|-|3-x|+2$

27. Ověřte, že bod T leží na dané kuželosečce. Potom napište rovnici tečny v bodě T dané kuželosečky.

a) $T[2;0], 2x^2-3x+y-2=0$

b) $T[2;-4], x^2+y^2-2x+4y=0$

c) $T[-2;2], 4x^2-y^2-12=0$

d) $T[1;0], x^2+2y^2+4x-5=0$

28. Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně a = 4 cm. Vypočítejte vzdálenost dvou bodů:

a) A, G

b) A, S_{GH}

c) A, S_{EG}

d) S_{AC}, S_{CG}

e) S_{BG} , S_{AF}

29. Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně a = 4 cm. Vypočítejte vzdálenost bodu od přímky :

a) F, AB

b) F, AC

c) H, AS_{CG}

30. Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně a = 4 cm. Vypočítejte odchylku přímek:

a) AC, CH

b) AC, EC

c) AG, BH

d) AF, CH

e) AE, BH

f) AS_{EG}, $S_{AB}S_{BC}$

g) AS_{GH} , $S_{AB}E$

20. ROVINA A JEJÍ ČÁSTI

obecný tvar a parametrické vyjádření roviny, vektorový součin, normálový vektor roviny, vzájemná poloha bodu a roviny, přímky a roviny, vzájemná poloha dvou rovin, odchylka dvou rovin, řezy rovin

1. Napište parametrické vyjádření roviny, která je určena přímkou p a bodem Q, je-li dáno: Q [1; -3; 1], p: $x = 1 - t$, $y = -1 - 3t$, $z = 4 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Zjistěte, zda bod X [-1; -1; 3] leží v rovině určené body A [1; 2; -1], B [3; 1; 1], C [-1; 1; 0].

3. Napište parametrické vyjádření roviny ABC:
a) A [1; 0; 1], B [1; 2; 3], C [2; 3; -1]
b) A [3; 1; 1], B [2; -1; 0], C [1; 0; 3]

4. Napište parametrické vyjádření roviny ABC, jestliže A [2; -1; 4], B [1; 1; 5], C [5; -1; 2]. Určete první souřadnici bodu E [x; 3; -2] ležícího v rovině ABC.

5. Zapište obecnou rovnici roviny ABC:
a) A [1; 0; 2], B [-1; 1; -2], C [3; 2; 0]
b) A [1; 1; 4], B [-1; 2; 1], C [0; -1; 0]
c) A [2; 3; 1], B [1; 0; 1], C [-3; -2; -1]
d) A [1; -1; 2], B [3; 1; 1], C [-1; -3; 3]

6. Určete číslo r tak, aby rovina $5x - y + z + r = 0$ procházela bodem A [4; 2; 7].

7. Jakou obecnou rovnici má rovina s parametrickým vyjádřením $x = 1 - t,\ y = -3 + s,\ z = t - s,\ t, s \in \mathbb{R}$?

8. Napište obecnou rovnici roviny ρ, která je určena bodem A [4; -1; 2] a přímkou p s parametrickým vyjádřením $p: x = 5 + t,\ y = 1 + 3t,\ z = 2 - t,\ t \in \mathbb{R}$.

9. Napište obecnou rovnici roviny ρ, ve které leží body A [-1; 2; 4], B [-2; 4; -3] a která je rovnoběžná s přímkou $p: x = 3 - 4t,\ y = 1 - t,\ z = 5 - t,\ t \in \mathbb{R}$.

10. Jsou dány body L [3; -2; 5], M [-2; 5; -4] a rovina $\rho: x = 1 + t + s,\ y = 2 - t - 3s,\ z = 4 + t - 3s,\ t, s \in \mathbb{R}$. Určete obecnou rovnici roviny σ, ve které leží body L, M a která je kolmá k rovině ρ.

11. Společným bodem rovin α, β, γ veďte rovinu ρ rovnoběžnou s rovinou δ.
$\alpha: 3x - y + z + 1 = 0$, $\beta: -x + 2y - z - 5 = 0$, $\gamma: x = -8 + r - 3s,\ y = -1 + r,\ z = 2 + 3s;\ r, s \in \mathbb{R}$,
$\delta: x = 6 - 5t + 3u,\ y = 2 + 4t - u,\ z = 1 - t;\ t, u \in \mathbb{R}$.

12. Rozhodněte, jakou vzájemnou polohu mají roviny ρ a σ. Jsou-li různoběžné, určete jejich průsečnici.
a) $\rho: 2x - 3y + z - 4 = 0, \sigma: 4x + y - 5z + 3 = 0$
b) $\rho: x + 2y - z + 1 = 0, \sigma: -2x - 4y + 2z + 3 = 0$
c) $\rho: 2x + 3y - 4z + 2 = 0, \sigma: -x - \frac{3}{2}y + 2z - 1 = 0$

13. Napište obecnou rovnici roviny, která prochází bode M a je rovnoběžná s rovinou σ.
a) $M[3; 1; 2], \sigma: 2x + 3y - z + 1 = 0$
b) $M[1; 1; 0], \sigma: x - y - 1 = 0$

14. Napište rovnici roviny, která je
a) rovnoběžná s rovinou $\rho: x - 2y + z - 4 = 0$ a prochází bodem M [-1; -1; 2]
b) kolmá s rovinou $\sigma: x + 2y - 2z + 4 = 0$ a prochází bodem M [2; 1; -1]

15. Napište rovnici roviny, která prochází bodem M [4; 3; 2] a je kolmá na přímku $p: x = 3 + 2t,\ y = 11 + 7t,\ z = 1 + 3t,\ t \in \mathbb{R}$.

16. Vyšetřete vzájemnou polohu roviny ρ a přímky p, jestliže jsou dána jejich parametrická vyjádření:

a) $\rho: x=4+3r+s,\ y=-5-3r+3s,\ z=2-r-7s;\ r,s\in\mathbb{R}$
$p: x=5-t,\ y=6, z=-3+2t,\ t\in\mathbb{R}$.

b) $\rho: x=-1-r+3s,\ y=1+3r-6s,\ z=2-3r+4s;\ r,s\in\mathbb{R}$
$p: x=4+3t,\ y=3+2t,\ z=-6-4t,\ t\in\mathbb{R}$.

17. Určete vzdálenost bodu P [3; -2; -1] od roviny $\rho: 2x-6y+3z-1=0$.

18. Vypočítejte odchylku φ přímky AB a roviny ρ, je-li A [1; 0; 7], B [3; -3; 6], $\rho: 2x-3y+z+4=0$.

19. Určete průsečík P roviny ρ a kolmice vedené k rovině ρ z bodu M.

a) $M[5;5;-2], \rho: 2x+3y-z+1=0$

b) $M[-2;0;8], \rho: -x-y+2z=0$

20. Určete bod M' souměrný k bodu M podle roviny ρ

a) $M[5;1;4], \rho: 2x-y+z-1=0$

b) $M[3;-2;11], \rho: x-3z=0$

21. Napište parametrické rovnice přímky p, která prochází bodem P a je kolmá k rovině ABC.

a) P [1; -3; 0], A [1; 1; 2], B [2; -1; 0], C [3; 0; -2]

b) P [2; 1; -1], A [3; 1; 2], B [1; 2; -1], C [2; -1; 1]

22. Je dán čtyřstěn $ABCD$: A [0; 1; 3], B [1; 0; 2], C [-2; -1; 5], D [0; -2; -6]. Vypočítejte

a) odchylku přímky AD a roviny ABC

b) odchylku roviny ABC a roviny ABD

c) odchylku přímky DC a roviny ABD

d) odchylku roviny ABC a roviny BCD

e) obsah stěny ABC

f) objem čtyřstěnu $ABCD$

23. Je dána rovina $\rho: 2x-y+2z-6=0$.

a) Určete odchylku přímky p od roviny ρ, jestliže: $p: x=1-3t,\ y=2-4t,\ z=3+t,\ t\in\mathbb{R}$.

b) Určete odchylku rovin ρ a σ, jestliže: $\sigma: 3x+4y-z+2=0$.

c) Napište obecnou rovnici roviny π, která je rovnoběžná s rovinou ρ a její vzdálenost od roviny ρ je 2.

d) Určete průsečíky roviny ρ se souřadnicovými osami.

24. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou:

a) ACS_{GH} b) $S_{FG}S_{GH}S_{AD}$ c) $S_{AD}S_{AB}S_{CG}$

d) $KLM: K\in AB\wedge|BK|=3|AK|, L=S_{GH}, M\in EH\wedge|HM|=3|EM|$

e) $RST: R\in BF\wedge|BR|=3|FR|, S=S_{AD}, T\in CG\wedge|GT|=3|CT|$

25. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průsečík:

a) přímky $S_{AC}S_{EG}$ s rovinou BCE

b) přímky FD s rovinou $S_{GH}S_{CG}M$; $M\in EF\wedge|FM|=3|EM|$

c) přímky EC s rovinou $AS_{BF}M$; $M\in EH\wedge|EM|=3|MH|$

26. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průsečnici rovin:

a) ACE, AFH

b) EGS_{BC}, BHF

c) ABG, HFS_{AD}

27. Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně a = 4 cm. Vypočítejte vzdálenost:

a) bodu F od roviny BEH

b) bodu F od roviny BCS_{AE}
c) bodu E od roviny $S_{EH}S_{EF}S_{AB}$

28. Je dána krychle *ABCDEFGH*. Vypočítejte odchylku přímky od roviny:
a) BH, ABC
b) BH, BCF
c) AG, BCG
d) AS_{EG} , BDH
e) AS_{EG} , BCF

21. SUBSTITUCE

význam substituce při řešení některých rovnic, kvadratická a bikvadratická rovnice, logaritmická, exponenciální a goniometrická rovnice, neurčitý integrál

1. Vhodnými substitucemi řešte rovnice:

a) $x^2+2x-12-2\sqrt{x^2+2x+12}=0$

b) $\sqrt{2x^2+5x}-\sqrt{2x^2+5x-10}=\sqrt{2}$

c) $\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}-3\right)\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}+4\right)+10=0$

d) $\sqrt{\frac{3}{x}+\sqrt{\frac{3}{x}}}=1-\sqrt{\frac{3}{x}}$

e) $\sqrt{\frac{x+10}{x+2}}-3\sqrt{\frac{x+2}{x+10}}=2$

f) $x^4-\frac{10}{3}x^2+1=0$

g) $x^4-10x^2+9=0$

h) $x^4-3(x^2-1)=7(x^2-3)$

i) $\frac{x^2-3}{3}=\frac{3}{x^2-3}$

j) $\frac{3x}{2x-1}+1=2.\frac{2x-1}{x}$

k) $x^4-14x^2+45=0$

l) $4x^4-37x^2+9=0$

m) $\left(\frac{x-3}{x+2}-5\right).\left(\frac{x-3}{x+2}+3\right)-9=0$

n) $\left(\frac{x-2}{x+3}-3\right).\left(\frac{x+3}{x-2}-1\right)=\frac{2-x}{x+3}$

o) $\left(\frac{x+10}{x+2}\right)^2+5\frac{x+10}{x+2}-14=0$

p) $\left(\frac{x-1}{x+1}-2\right)\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)=\frac{1-x}{x+1}$

2. Vhodnými substicemi řešte exponenciální rovnice:

a) $4^x-9.2^x+8=0$

b) $6^{x+1}+6^{1-x}=37$

c) $4^{2x+1}=65.4^{x-1}-1$

d) $3^{x+1}+9^x=108$

e) $49^x-6.7^x+5=0$

f) $5^x-5^{3-x}-20=0$

g) $3^{x+2}+9^{x+1}=810$

h) $10.2^x-4^x=16$

i) $4^{2x+1}+1=65.4^{x-1}$

j) $4^{\sqrt{x-2}}+16-10.2^{\sqrt{x-2}}=0$

3. Pomocí substituce řešte logaritmické rovnice:

a) $\log x+\frac{1}{\log x}=2$

b) $1+\log x^3=\frac{10}{\log x}$

c) $\log x^2.\log\sqrt{x}-\log\frac{1}{x}=2$

d) $\log x-(\log\sqrt[6]{x})^{-1}=1$

e) $x^{\log x-2}=1000$

f) $x^{\log_2 x}=4x$

g) $x^{1+\log x}=100$

h) $\log_3^2 x-3\log_3 x-10=0$

i) $\frac{1}{5-\log x}+\frac{2}{1+\log x}=1$

j) $\log^2 x-3\log x=\log x^2-4$

k) $\log_4\left[\log_2(\log_3 x)\right]$

l) $x^{\log x-1}=100$

4. Řešte goniometrické rovnice:

a) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$

b) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$

c) $cotg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$

d) $\frac{1}{\sqrt{5}}.\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

e) $\sin(2x+\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $tg(-x+\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$

g) $\sin^2 x+2\sin x-3=0$

h) $\sin^2 x+5\sin x+4=0$

i) $\sin^2 x+\cos x+1=0$

j) $3\cos^2 x-4\cos x-\sin^2 x-2=0$

k) $2\sqrt{3}\sin^2 x=\cos x$

l) $2\,tg\,x+4\,cotg\,x=9$

5. Vypočítejte substituční metodou a proveďte zkoušku:

a) $\int\sin^6 x.\cos x\,dx$

b) $\int 10x(x^2+13)^{12}\,dx$

c) $\int 5x^2 . e^{x^3} dx$

d) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\, dx$

e) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

f) $\int \frac{3x}{(x^2+4)^3} dx$

g) $\int \frac{5x}{3x^2+1} dx$

h) $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$

22. TROJÚHELNÍK

věty platné v pravoúhlém trojúhelníku (Pythagorova a Eukleidovy věty) a obecném trojúhelníku (sinová a kosinová věta), charakteristické prvky v trojúhelníku (výška, těžnice, střední příčka, kružnice opsaná a vepsaná trojúhelníku), analytické vyjádření charakteristických prvků v trojúhelníku

1. Nad úsečkou délky $2r$ je jako nad průměrem opsána půlkružnice a sestrojen obdélník, jehož druhý rozměr je r. Jaká část úhlopříčky obdélníka leží vně kružnice?

2. Určete:
   a) délku přepony pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka s odvěsnou délky a,
   b) výšku, poloměr kružnice opsané a vepsané v rovnostranném trojúhelníku o délce strany a,
   c) výšku k základně v rovnoramenném trojúhelníku se základnou délky a a ramenem délky b.

3. Vypočítejte zbývající prvky (a, b, c, c_a , c_b ,v, α, β) v pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C, je-li dáno:
   a) $c = 10$ cm, $c_a = 7$ cm,
   b) $a = 5$ cm, $c_a = 4$ cm,
   c) $b = 5$ cm, $c = 13$ cm.

4. Vypočítejte délky strany pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C, je-li dáno $t_a = 8$ cm, $t_b = 12$ cm.

5. Je dán obdélník $ABCD(|AB|=8\,cm, |BC|=6\,cm)$. Označte A_1 patu kolmice sestrojené z bodu A na úsečku BD, označte A_2 patu kolmice sestrojené z bodu A_1 na úsečku AB. Vypočítejte délky úseček:
   a) $|BD|$ b) $|DA_1|$ c) $|BA_1|$ d) $|AA_1|$ e) $|A_1A_2|$

6. Vypočítejte velikosti zbývajících stran a úhlů v obecném trojúhelníku ABC, je-li dáno:
   a) $b=13{,}4\,cm, b=16{,}3\,cm, \gamma=70°12'$
   b) $c=210\text{cm}, \alpha=62°32', \beta=48°56'$
   c) $a=52\text{cm}, \gamma=57°43', \beta=63°14'$
   d) $a=5{,}2\,cm, c=8{,}8\,cm, \gamma=52°08'$

7. Dvě loďky jsou zaměřeny z výšky 150 m nad hladinou jezera pod hloubkovými úhly o velikostech $\alpha=57°, \beta=39°$. Vypočítejte vzdálenost mezi oběma loďkami, jestliže zaměřovací přístroj a obě loďky jsou v rovině kolmé k hladině jezera.

8. Na vrcholu kopce stojí rozhledna 35 m vysoká. Patu i vrchol vidíme z určitého místa v údolí pod výškovými úhly o velikostech $\alpha=28°, \beta=31°$. Jak vysoko je vrchol kopce nad rovinou pozorovacího místa?

9. Z místa A ležícího ve výšce 158 m nad vodorovnou rovinou procházející patou věže je vidět vrchol věže pod hloubkovým úhlem $\alpha=19°10'$ a patu věže pod hloubkovým úhlem $\beta=28°30'$. Určete výšku věže.

10. Vypočítejte výšku stožáru, jehož patu vidíme v hloubkovém úhlu o velikosti 11°23′ a vrchol ve výškovém úhlu o velikosti 28°57′. Stožár je pozorován z jednoho místa 10 m nad rovinou paty stožáru.

11. Vypočítejte velikosti zbývajících stran a úhlů v obecném trojúhelníku ABC, je-li dáno:
    a) $a=5\text{cm}, b=6\text{cm}, c=7\text{cm}$
    b) $b=32\text{cm}, c=40\text{cm}, \alpha=100°21'$
    c) $a=7\text{cm}, b=4\text{cm}, \gamma=38°$
    d) $a=16\text{cm}, b=25\text{cm}, c=36\text{cm}$

12. Určete velikost zorného úhlu, pod nímž vidí pozorovatel předmět 12 m dlouhý, je-li od jednoho jeho

konce vzdálen 15 m a od druhého 24 m.

13. Dva turisté se vydají ve stejnou dobu z jednoho místa po přímých cestách, které spolu svírají úhel 50°. První turista jde rychlostí $6\frac{km}{h}$ a druhý rychlostí $8\frac{km}{h}$. Určete vzdušnou vzdálenost obou turistů po 12 minutách.

14. Dvě obce *A, B* jsou odděleny lesem. Obě jsou viditelné z obce *C*, která je s oběma obcemi spojena přímými cestami. Jak dlouhá je projektovaná cesta z *A* do *B*, je-li:
$|AC|=2003\,m, |BC|=1593\,m, |\sphericalangle ACB|=63°23'$.

15. Vypočítejte poloměr kružnice opsané trojúhelníku *ABC*, ve kterém je $a=26{,}5\,cm, \alpha:\beta:\gamma=2:3:4$.

16. Vypočítejte délky stran v trojúhelníku *ABC*, ve kterém platí: $r=10\mathrm{cm}, \alpha=113°, \beta=48°$.

17. Vypočítejte obsah trojúhelníku *ABC,* jestliže je dáno:
a) a = 26,43 mm, b = 37,56 mm, c = 41,62 mm
b) b = 72,5 mm, c = 56,7 mm, $\alpha=74°12'$

18. Vypočítejte délky stran a velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku *ABC*, jestliže je dáno:
a) S = 54,39 cm^2, $\gamma=144°3', \alpha=32°37'$
b) r = 9 cm, a = 15 cm, $\beta=23°$

19. Je dána úsečka $BB_1, |BB_1|=6\mathrm{cm}$. Sestrojte všechny trojúhelníky *ABC*, pro které je BB_1 těžnicí t_b a pro které platí $v_b=5\mathrm{cm}, c=5{,}5\,cm$.

20. Je dána úsečka $AB, |AB|=6\mathrm{cm}$. Sestrojte všechny trojúhelníky *ABC*, pro které platí:
a) $a=5\mathrm{cm}, t_c=5\mathrm{cm}$
b) $a=5\mathrm{cm}, \gamma=60°$
c) $v_c=5\mathrm{cm}, t_c=5{,}5\,cm$
d) $\alpha=45°, v_a=5{,}5\,cm$

21. Je dána úsečka $BC, |BC|=5\mathrm{cm}$. Sestrojte všechny trojúhelníky *ABC*, pro které platí:
a) $b=6{,}5\,cm, \beta=60°$
b) $\gamma=60°, t_c=5{,}5\,cm$
c) $v_b=4{,}5\,cm, t_c=5{,}5\,cm$

22. Je dán trojúhelník *ABC*, *A* [1; 4], *B* [3; -2], *C* [-4; -6]. Určete v parametrickém tvaru rovnici přímky, na které leží:
a) strana c b) výška v_c c) těžnice t_c
d) osa úsečky *AB* e) střední příčka rovnoběžná s *AB*

23. Je dán trojúhelník *ABC*, *A* [-1; 4], *B* [2; -2], *C* [5; -1]. Vypočítejte:
a) vnitřní úhel β trojúhelníku *ABC*
b) odchylku přímek *AB, BC*
c) odchylku osy úsečky *AB* a osy x
d) obsah trojúhelníku *ABC*

24. Je dán trojúhelník *ABC, A* [-1; 4], *B* [2; -2], *C* [5; -1]. Určete obecné rovnice přímek, které obsahují:
a) stranu *AB* b) stranu *BC* c) těžnici t_a d) těžnici t_b

25. Napište rovnici kružnice opsané trojúhelníku *ABC*:
a) *A* [-1; 3], *B* [0; 2], *C* [1; -1] b) *A* [0; 0], *B* [3; 0], *C* [0; 4]
c) *A*[4; 3], *B*[2;–1], *C*[–5; 6]

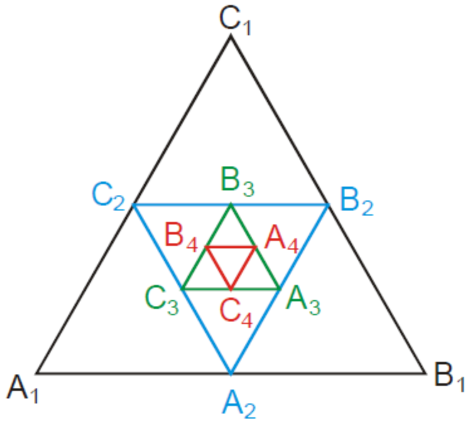
26. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Délka odvěsny má délku 24 cm. Určete délky zbývajících stran.

27. Do rovnostranného trojúhelníku $A_1B_1C_1$ o délce strany 4 cm je vepsán druhý trojúhelník $A_2B_2C_2$ jehož vrcholy leží ve středech stran trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Podobným způsobem je do trojúhelníku a vepsán trojúhelník $A_2B_2C_2$, do trojúhelníku $A_3B_3C_3$ trojúhelník $A_4B_4C_4$ a tak dále až do nekonečna. Určete:

a) součet obvodů

b) součet obsahů

všech takto vzniklých trojúhelníků.



23. UŽITÍ MATEMATIKY V PRAXI

trigonometrie, využití geometrické posloupnosti ve finančnictví, minimaxové úlohy

1. Vrchol věže stojící na rovině vidíme z určitého místa A ve výškovém úhlu $\alpha = 39°25'$. Přijdeme-li směrem k jeho patě o 50 m blíž na místo B, vidíme z něho vrchol věže ve výškovém úhlu $\beta = 58°42'$. Jak vysoká je věž?

2. Dvě přímé cesty se křižují v úhlu $\alpha = 53°30'$. Na jedné z nich stojí dva sloupy, jeden na křižovatce, druhý ve vzdálenosti 500 m od ní. Jak daleko je třeba jít do křižovatky po druhé cestě, aby byly vidět oba sloupy v zorném úhlu
a) $\beta = \alpha$, b) $\beta = 15°$

3. Sílu o velikosti $F = 465$ N rozložte na dvě složky tak, aby s ní svíraly úhly o velikostech $\alpha = 69°30'$a $\beta = 74°10'$. Vypočítejte velikosti složek.

4. Ze dvou míst M, N na vodorovné rovině vzdálených od sebe 3,1 km byl pozorován mrak nad spojnicí obou míst ve svislé rovině ve výškových úhlech $\alpha = 78°40'$, $\beta = 63°50'$. Jak vysoko byl mrak?

5. Na vrcholu hory stojí věž hradu vysoká $v = 30$ m. Křižovatku silnic v údolí vidíme z vrcholu věže a od její paty v hloubkových úhlech $\alpha = 32°50'$, $\beta = 30°10'$. Jak vysoko je vrchol hory nad křižovatkou?

6. Vypočítejte šířku řeky, na jejímž jednom břehu byla změřena vzdálenost bodů $A, B,$ $|AB| = 50\,m.$ Z koncových bodů úsečky AB je vidět bod C na druhém břehu pod úhly $\alpha = 32°30', \beta = 42°10'$ vzhledem k úsečce AB.

7. Z pozorovatelny 15 m vysoké a vzdálené 30 m od břehu řeky se jeví šířka řeky v zorném úhlu $\alpha = 15°$. Vypočítejte šířku řeky.

8. Kosmická loď byla sledována radarovým zařízením ze Země. Při výškovém úhlu $\alpha = 20°35'$ byla naměřena vzdálenost $d = 520$ km. V jaké výšce nad Zemí (poloměr Země $R = 6378$ km) byla loď v okamžiku pozorování?

9. Dvě loďky jsou zaměřeny z výšky 150 m nad hladinou jezera pod hloubkovými úhly o velikostech $\alpha = 57°, \beta = 39°$. Vypočítejte vzdálenost mezi oběma loďkami, jestliže zaměřovací přístroj a obě loďky jsou v rovině kolmé k hladině jezera.

10. Na vrcholu kopce stojí rozhledna 35 m vysoká. Patu i vrchol vidíme z určitého místa v údolí pod výškovými úhly o velikostech $\alpha = 28°, \beta = 31°$. Jak vysoko je vrchol kopce nad rovinou pozorovacího místa?

11. Z místa A ležícího ve výšce 158 m nad vodorovnou rovinou procházející patou věže je vidět vrchol věže pod hloubkovým úhlem $\alpha = 19°10'$ a patu věže pod hloubkovým úhlem $\beta = 28°30'$. Určete výšku věže.

12. Vypočítejte výšku stožáru, jehož patu vidíme v hloubkovém úhlu o velikosti $11°23'$ a vrchol ve výškovém úhlu o velikosti $28°57'$. Stožár je pozorován z jednoho místa 10 m nad rovinou paty stožáru.

13. Určete velikost zorného úhlu, pod nímž vidí pozorovatel předmět 12 m dlouhý, je-li od jednoho jeho konce vzdálen 15 m a od druhého 24 m.

14. Dva turisté se vydají ve stejnou dobu z jednoho místa po přímých cestách, které spolu svírají úhel 50°. První turista jde rychlostí $6\frac{km}{h}$ a druhý rychlostí $8\frac{km}{h}$. Určete vzdušnou vzdálenost obou turistů po 12 minutách.

15. Dvě obce A, B jsou odděleny lesem. Obě jsou viditelné z obce C, která je s oběma obcemi spojena přímými cestami. Jak dlouhá je projektovaná cesta z A do B, je-li:
$|AC| = 2003\,m,\ |BC| = 1593\,m,\ |\sphericalangle ACB| = 63°23'$.

16. Podnikatel chce získat na začátku příštího roku od banky úvěr na 1 rok, s jednorázovou splatností po jednom roce. Banka nabízí úvěr s úrokovou mírou 11,4 %; úrokovací období je čtvrt roku, úročí se na konci každého kalendářního čtvrtletí, jde o složené úročení. Podnikatel předpokládá, že za rok bude mít na splacení dluhu 4 miliony korun. Kolik korun si může maximálně vypůjčit?

17. Máme volný kapitál 24000 Kč, který chceme zvýšit na 25000 Kč. Jako jedna z možností se nabízí uložit peníze na termínovaný vklad na 1 měsíc s revolvingem (úroky by byly připisovány k vkladu). Úrokovací období je v tomto případě 1 měsíc. Předpokládáme, že úroková míra by byla po celou dobu neměnná a činila by 3%. Za jak dlouho bychom se dočkali částky, která není nižší než 25000 Kč?

18. Potřebovali bychom, aby se náš kapitál 10000 Kč zvýšil za 2 roky na 15000 Kč. Předpokládáme, že bychom peníze uložili na termínový vklad na 2 roky a že by banka úročila jednou měsíčně; šlo by o složené úročení. Jak vysokou úrokovou míru by nám musela banka nabídnout, aby splnila náš požadavek?

19. Klient banky si založil dne 4.3. vkladní knížku a uložil na ni 7200 Kč. Dne 12.6. vložil na knížku částku ve výši 12500 Kč a dne 14.10.částku 9400 Kč. Úrokovací období je 1 rok, banka úročí na konci kalendářního roku. Kolik korun by mě klient na vkladní knížce na konci kalendářního roku po připsání zdaněného úroku? Úroková míra byla po celý rok neměnná a činila 2,4%. Klient žádné peníze během roku z knížky nevybíral.

20. Klient dal příkaz bance, aby mu na <u>začátku</u> příštího roku založila spořící účet a ukládala na něj od ledna pravidelně jednou měsíčně, vždy 10. dne v měsící částku 2500 Kč. (Převod peněz bude realizován z klientova běžného účtu.) Vypočítejte, kolik korun bude mít klient na spořícím účtu na konci kalendářního roku pro zúročení bankou. Banka úročí jednou čtvrtletně, vždy na konci kalendářního čtvrletí. Předpokládejte neměnnou úrokovou míru ve výši 2%.

21. Získali jsme od banky účelový spotřebitelský úvěr na nákup sportovních potřeb ve výše 70000 Kč na 36 měsíců s úrokovou mírou 12,5%. Úvěr budeme splácet měsíčními anuitami. Úrokovací období je 1 měsíc. První úročení a první splátka budou realizovány za 1 měsíc po poskytnutí úvěru. Banka nám sdělila, že anuitní splátka bude činit 2342 Kč. (Splátky jsou zaokrouhleny na koruny.)
a) Zkontrolujte si, zda je výše anuity správně určena.
b) Zjistěte, kolik korun celkem budeme muset bance ve splátkách zaplatit a kolik korun z toho bude činit úrok.
c) Vypočítejte, o kolik procent je celková splátka vyšší než poskytnutý úvěr.

22. Klient hypoteční banky získal hypoteční úvěr na stavbu domku ve výši 1,8 milionu korun na dobu 15 let. Úvěr bude splácet měsíčními anuitami. Předpokládáme, že po celou dobu splácení úvěru bude úroková míra 5,29%.
a) Vypočítejte, kolik korun bude v takovém případě činit výše anuity.
b) Kolik korun celkem klient za 15 let hypoteční bance měsíčními anuitami splatí?

23. Nádrž na vodu má mít tvar kvádru se čtverečným dnem s objemem 256 m^3. Určete rozměry nádrže tak, aby byla minimální spotřeba na její vyzdění.

24. Je dán kartón papíru o rozměrech 60 a 28. Vystřihneme čtyři rohy tak, aby po vystřižení kartónu vznikla krabička (bez víčka) s co největším objemem.

25. Na přímce $y = 3x - 1$ najděte bod P, jehož vzdálenost od bodu A [1; -2] je co nejmenší.

26. Objem válcové nádoby je 1 litr. Vypočtěte minimální povrch této nádoby.

27. Určete rozměry otevřeného bazénu se čtvercovým dnem o objemu 32 m^3 tak, aby na jeho stěny a dno bylo potřeba co nejméně materiálu.

28. Do koule o poloměru *r* vepište rotační válec o maximálním objemu. Určete rozměry válce.

24. VÝRAZY A MNOHOČLENY

pravidla pro umocňování dvojčlenu a trojčlenu, kombinační číslo, Pascalův trojúhelník a jeho vlastnosti, faktoriál, výrazy s goniometrickými funkcemi, výrazy s komplexními čísly

1. Najděte podmínky existence výrazu a výraz zjednodušte:

a) $\left[x+y-\frac{4xy}{x+y}\right]:\frac{1}{x^2-y^2}$

b) $\frac{2a-1}{2a}-\frac{2a}{2a-1}-\frac{1}{2a-4a^2}$

c) $\dfrac{\frac{a^2}{b^2}-\frac{a}{b}}{\frac{a^2+b^2}{ab}-2}:\frac{a^2}{b}$

d) $\dfrac{\frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{1+x}{1+x+x^2}}{\frac{1+x}{1+x+x^2}-\frac{1-x}{1-x+x^2}}$

e) $\left(y+1+\frac{1}{2y-1}\right).\left(y-1+\frac{1}{2y+1}\right)$

f) $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)$

g) $\left(\frac{b}{a^2+ab}-\frac{2}{a+b}+\frac{a}{b^2+ab}\right):\left(\frac{b}{a}-2+\frac{a}{b}\right)$

h) $1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\frac{1}{x}}}$

i) $\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$

j) $\left(\frac{2a}{a+2}+\frac{6a}{6-3a}+\frac{8a}{a^2-4}\right):\frac{a-4}{a-2}$

k) $\left(\frac{x-y}{xy}-\frac{z-y}{yz}-\frac{x+z}{xz}\right)^{-1}$

l) $\left(\frac{1}{a+1}-\frac{2a}{a^2-1}\right).\left(\frac{1}{a}-1\right)$

m) $\left[(1-x)^{-1}-1\right].\left[x+1-(1-2x^2).(1-x)^{-1}\right]^{-1}$

n) $(x^2-1).\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-1\right)$

o) $\left(\frac{a+1}{2a-2}+\frac{6}{2a^2-2}-\frac{a+3}{2a+2}\right).\frac{4a^2-4}{3}$

p) $\left(\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}\right).\left(\frac{x^2+9}{6x}+1\right):\frac{x^2+9}{3x}$

q) $\left(\frac{1}{y-2}-\frac{1}{y^2+2y+4}-\frac{8}{y^3-8}\right).\dfrac{y^2-\frac{8}{y}}{1-\frac{1}{y}}$

r) $\dfrac{\frac{1}{1-m}+1+\frac{2}{m^2-1}}{m-1-\frac{2m^2-1}{m+1}}$

2. Upravte a určete podmínky pro n:

a) $\frac{7!+6!+5!}{8!-7!}$

b) $\frac{n!(n+1)!}{(n-1)!(n+2)!}$

c) $\frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2}$

d) $\frac{(n-3)!(n^2-1)}{(n-1)!}$

e) $\frac{4-n^2}{(n+2)!}+\frac{n}{(n+1)!}$

f) $\frac{n}{(n-3)!}-\frac{1}{(n-4)!}$

g) $\frac{2}{n!}-\frac{2n}{(n+1)!}-\frac{2n+4}{(n+2)!}$

3. Dokažte, že pro přípustná n platí:

a) $n.n!+(n-1)!=(n+1)!$

b) $n!+n^2(n-1)!=(n+1)!$

c) $(n+1)!-n!=n.n!$

4. Zjednodušte a vypočítejte:

a) $\binom{8}{6}$

b) $\binom{16}{10}$

c) $\binom{185}{184}$

d) $\binom{n+2}{2}$

e) $\binom{n+3}{n}$

f) $\binom{n+2}{n-2}$

g) $\binom{15}{3}+\binom{8}{5}-\binom{15}{12}$

h) $\binom{9}{8}-\binom{9}{6}+\binom{9}{4}-\binom{9}{2}$

5. Vyjádřete jedním kombinačním číslem:

a) $\binom{17}{8}+\binom{17}{9}$

b) $\binom{11}{7}+\binom{11}{5}$

c) $\binom{10}{1}+\binom{10}{0}+\binom{11}{9}$

d) $\binom{12}{3}+\binom{4}{3}-\binom{12}{9}$

6. Vypočítejte:

a) $2\cos 0+3\sin\frac{\pi}{2}+4\sin\pi$

b) $a\sin\pi+b\cos\pi+c\,tg\,\pi$

c) $\sin\frac{2\pi}{3}+tg\frac{7\pi}{4}+\frac{3}{2}cotg\frac{5\pi}{3}$

7. Určete:

a) tg x, je-li $\cos x=\frac{3}{5}\wedge x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

b) sin x, je-li $cotg\,x=\frac{8}{15}\wedge x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

c) sin x, je-li $tg\,x=-\frac{3}{4}\wedge x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

d) cos x, je-li $\sin x=\frac{15}{17}\wedge x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

8. Určete definiční obor daného výrazu a potom ho zjednodušte:

a) $\sin^2 x\cos x+\cos^3 x$

b) $\sin^4 x-\cos^4 x+\cos^2 x$

c) $\frac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x}$

d) $\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}$

e) $\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{\sin x}{1-\cos x}$

f) $cotg\,x+\frac{\sin x}{1+\cos x}$

g) $\frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}$

h) $\frac{\cos x}{1-\sin x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}$

i) $\frac{1-4\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$

9. Vypočítejte:

a) $(i+1)(i-1)+(2i+1)^2$

b) $(2+i).i+\frac{3+i}{2-i}$

c) $-\frac{i-1}{2}-\frac{i}{i-1}.i+1$

d) $\frac{2+i}{i}+\frac{i}{i+1}-\frac{2i+1}{i-1}$

e) $(5i-1):\left(2-\frac{i+3}{2+i}\right)$

f) $i.i^2.i^3.i^4.i^5.i^6.i^7.i^8.i^9.i^{10}$

g) $1+i^2+i^4+i^6+i^8+i^{10}$

h) $\overline{\left(\frac{1+i}{2-i}\right)}$

i) $\frac{2-4i}{1+i}(3-2i)+(1+2i).i^7$

j) $(-3+2i).i^3-\frac{10-2i}{-3+i}+(-1-i)^2$

k) $(-2+3i)^2.i^5+\frac{13-26i}{3+2i}-(1-i)(1+i)$

25. VÝROKY A MNOŽINY

výrok, výroková formule, logické spojky, tabulka pravdivostních hodnot, kontradikce, tautologie, množina a její zápis, operace s množinami, Vennovy diagramy, číselné množiny

1. Utvořte negaci následujících výroků:
a) Každý pravidelně sportuje.
b) Aspoň pět lidí podá zlapšovací návrh.
c) Dvě různoběžky mají společný právě jeden bod.
d) Nikdo neměl úraz.
e) Jestliže se řidič cítí unaven, zastaví k odpočinku.
f) Trojúhelník *ABC* je pravoúhlý, právě když pro jeho přeponu délku *c* a odvěsny s délkami *a, b* platí $c^2=a^2+b^2$.

2. Určete pravdivostní hodnoty výrokových formulí:
a) $(A\Rightarrow B')\wedge(A'\Leftrightarrow B)$
b) $(A\Rightarrow B)\Rightarrow(A\wedge B')$
c) $(A\Rightarrow B)\Leftrightarrow(B'\Rightarrow A')$
d) $(A\wedge B')\Rightarrow(A\Rightarrow B)'$
e) $[(A\Rightarrow B)\wedge B']\Rightarrow A'$
f) $[(A\Rightarrow B)\wedge A]\Rightarrow B$

3. Určete pravdivostní hodnoty *V(x)* uvedených tvrzení pro dané hodnoty proměnné *x*:
a) $x=1\vee x>3\,;\, x\in\{0,1,3,4\}$
b) $x<0\wedge x\neq-1\,;\, x\in\{0,-1,-2\}$
c) $x<0\Rightarrow(x+1)^2\leq1\,;\, x\in\{-3,-1,0,1\}$
d) $x<0\Leftrightarrow(x+1)^2\leq1\,;\, x\in\{-3,-1,0,1\}$

4. Určete doplněk množiny B v množině A, jestliže:
a) $A=\mathbb{Z}\,, B=\{x\in\mathbb{Z}\,;|x|>2\}$
b) $A=\mathbb{R}, B=\{x\in\mathbb{R}\,;|x-1|<0\}$

5. Určete průnik a sjednocení množin A, B, jestliže:
a) $A=\{x\in\mathbb{Z}\,;\, x<-5\}, B=\{x\in\mathbb{Z}\,;\, x\leq-1\}$
b) $A=\mathbb{N}, B=\{x\in\mathbb{Z}\,;\, x<1\}$

6. Rozhodněte pomocí tabulky pravdivostních hodnot, zda jsou dané složené výroky tautologií nebo kontradikcí:
a) $[(A'\Rightarrow B)\vee(A'\Rightarrow C)]\Leftarrow(B\vee C)$
b) $[A\Rightarrow(B\Rightarrow C)]\Leftarrow[(A\wedge B)\Rightarrow C]$

7. Pro provozní dobu tří benzínových stanic *A*, *B*, *C* v určitém městě platí tyto podmínky: vždy je v provozu benzínová stanice *A* nebo *C*. Stanice *C* je mimo provoz právě tehdy, když je otevřeno ve stanici *A*. Má-li prodejní dobu stanice *C*, pak stanice *A* není v provozu a je v činnosti stanice *B*. Určete všechny možnosti provozu těchto tří benzínových stanic.

8. Jeden ze žáků *A, B, C* rozbil okno. Bylo zjištěno, že u okna nebyl žák *A* nebo nebyl žák *B*. Když u okna nebyl žák *B*, nebyl tam ani žák *A*. *C* byl u okna právě tehdy když, u okna nebyl *A*.

9. Účast Anny, Barbory, Cyrila a Dušana na koncertě je vázáno těmito podmínkami:
a) Přijde alespoň jeden chlapec.
b) Přijde nejvýše jedna dívka.
c) Přijde právě jeden ze sourozenců Anna, Cyril.
d) Barbora nepřijde bez Dušana.
e) Je vyloučeno, aby přišla Anna spolu s Dušanem.
Které skupiny z této čtveřice se mohou zúčastnit a kdo na koncert určitě půjde?

10. Kapitán Exner vyšetřuje případ vraždy. Vyšetřováním se okruh podezřelých zúžil na tři osoby *A, B, C*. O jejich přítomnosti na místě činu se ví: „Jestliže byl v kritické době na místě činu podezřelý C, pak tam nebyl podezřelý A, zato tam byl podezřelý B.“ „Není pravda, že na místě činu nebyl A a přitom tam nebyl C.“ „V době, kdy byl na místě činu podezřelý A, nebyl tam C, a když tam nebyl C, byl tam A.“ Koho kapitán Exner zatkl, když navíc bezpečně věděl, že pachatel byl sám?

11. a) Výčtem prvků zapište množiny:

$A=\{x\in\mathbb{N};2x<11\};B=\{x\in\mathbb{R};x^2=25\};C=\{x\in\mathbb{Z};-5\leq x<3\};D=\{x\in\mathbb{N};x^2=2\}$

b) na číselné ose znázorněte a jako interval zapište tyto množiny:

$A=\{x\in\mathbb{R};x>3\};B=\{x\in\mathbb{R};-7<x\leq-1\};C=\{x\in\mathbb{R};-1<x<0\}$

12. Přepište dané výroky pomocí kvantifikátorů, rozhodněte o jejich pravdivosti a znegujte:

a) Existuje aspoň jedno reálné číslo x, pro něž platí $\sqrt{x^2}=x$.

b) Pro všechna reálná čísla $x > 1$ platí $\sqrt{x^2}>x$.

c) Existuje aspoň jedno přirozené číslo, které není sudé ani liché.

13. Užitím Vennových digramů zjistěte, zda platí:

a) $A\cap(B\cup C)'=(A\cap B')\cap(A\cap C')$

b) $(A\cup B)\cap(A\cup C)'=A\cup(B\cap C')$

14. Písemná práce z matematiky, které se zúčastnilo 35 studentů, obsahovala tři úlohy. Dva studenti vyřešili jenom první úlohu a tři studenti jenom druhou úlohu. První a druhou úlohu vyřešilo 16 studentů, druhou a třetí 14 studentů. Všechny úlohy vyřešilo 10 studentů, první nebo třetí 31 studentů a 3 studenti nevyřešili ani první, ani druhou úlohu. Kolik studentů vyřešilo:

a) aspoň dvě úlohy   b) aspoň jednu úlohu?

15. Delegátka nabídla 45 účastníkům zahraničního pobytového zájezdu tři fakultativní výlety. První výlet si vybralo 23 rekreantů, první i druhý 7 rekreantů. 15 účastníků jelo na první výlet a přitom nejelo na třetí výlet, 10 jelo pouze na první výlet a 3 pouze na třetí výlet. Právě jeden z výletů si zvolilo 17 osob. Jedna třetina z počtu účastníků se nezúčastnila žádného výletu. Kolik účastníků si vybralo:

a) jenom druhý výlet,

b) druhý výlet,

c) právě dva výlety,

d) druhý a třetí výlet a přitom si nevybralo první výlet?

16. Z 350 učeben slouží fyzice 70, chemii 70 a matematice 50. 210 učeben je určeno k výuce jiných předmětů. Pro všechny 3 předměty se používá 10 učeben, pro chemii a matematiku 20 a matematiku a fyziku 10 učeben. Kolik odborných učeben se používá na fyziku nebo na chemii? Kolik pouze matematice?

17. Občanské hnutí pořádalo o prázdninách 3 brigády na vyčištění lesa, a to v pondělí, v úterý a ve středu. 8 lidí se zúčastnilo všech 3 brigád. 42 účastníků bylo právě na dvou, 83 bylo jen na jedné. V pondělí pracovalo 66 dobrovolníků, z nichž 20 přišlo i v úterý. 78 jich bylo na brigádě v pondělí i ve středu, ale ne v úterý. Kolik lidí bylo na brigádě v úterý a kolik ve středu?