18. POSLOUPNOSTI A ŘADY

aritmetická a geometrická posloupnost, vlastnosti aritmetické a geometrické posloupnosti, limita posloupnosti, nekonečné řady, periodická čísla

1. Vyšetřete, zda dané posloupnosti jsou monotónní:

a) $\{5n-7\}_{n=1}^{\infty}$ b) $\{-3n+2\}_{n=1}^{\infty}$

c) $\{n^2-10n\}_{n=1}^{\infty}$ d) $\{-2n^2+5\}_{n=1}^{\infty}$

e) $\left\{\frac{3}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ f) $\{n^2+3n-4\}_{n=1}^{\infty}$

2. Určete prvních pět členů dané posloupnosti a rozhodněte, je-li tato posloupnost omezená:

a) $\{2n+5\}_{n=1}^{\infty}$ b) $\{-2n^2-3\}_{n=1}^{\infty}$

c) $\{(-1)^n-1\}_{n=1}^{\infty}$ d) $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

e) $\left\{\frac{5n+2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ f) $\left\{\sin\frac{1}{2}\pi n\right\}_{n=1}^{\infty}$

3. Určete, od kterého členu jsou všechny další členy posloupnosti $\left\{\frac{1}{2+3n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ menší než $\frac{1}{1000}$.

4. Určete, která z daných posloupností je aritmetická, resp. geometrická; potom určete její diferenci, resp. kvocient:

a) $\{3n-4\}_{n=1}^{\infty}$ b) $\{2^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

c) $\{3.2^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ d) $\left\{\frac{n+1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

5. Dokažte, že daná tři čísla tvoří tři následující členy jisté
a) aritmetické posloupnosti: $\log 16, \log 8, \log 4$ a určete diferenci
b) aritmetické posloupnosti: $\sin 60°, \sin 0°, \sin(-60°)$ a určete diferenci
c) geometrické posloupnosti: $\sqrt{5}-\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}+\sqrt{2}$ a určete kvocient
d) geometrické posloupnosti: $\sin 2x, \cos x, \frac{1}{2} cotgx\, x, x \in (0, \pi)$ a určete kvocient

6. Určete $x \in \mathbb{R}$ tak, aby čísla a_1, a_2, a_3 tvořila tři následující členy aritmetické posloupnosti: $a_1 = \log(2x-1), a_2 = \log(4x-2), a_3 = \log(5x+2)$

7. Přičteme-li k daným číslům -6, 2, 26 reálné číslo *x*, dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Určete, které číslo musíme přičíst. Potom určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, která takto vznikne.

8. Určete $x \in \mathbb{R}$ tak, aby čísla a_1, a_2, a_3 tvořila tři následující členy geometrické posloupnosti:
a) $a_1=1, a_2=2^x, a_3=2^{x+2}+12$
b) $a_1=1+2\log x, a_2=3-4\log x, a_3=3+\log x$

9. A aritmetické posloupnosti je $a_1 = 20$, $d = 4$.
a) Kolikátý člen je roven číslu 100?
b) Kolikátý člen je roven číslu 150?

10. V geometrické posloupnosti je $a_1 = 64$, $q=\frac{1}{2}$. Kolikátý člen je roven číslu $\frac{1}{32}$?

11. Napište prvních pět členů aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a součet prvních deseti členů, je-li dáno:
a) $a_1=5, a_2=2$
b) $a_1=2, a_2=2+\sqrt{5}$
c) $a_2=7, d=-3$
d) $a_3=1, a_7=-7$
e) $a_1+a_6=16, a_3+a_4=19$
f) $a_1+a_4=26, a_2+a_5=30$
g) $a_4+a_5+a_7+a_8=10, \frac{a_{21}}{a_1}=2$

12. V aritmetické posloupnosti je dáno:
a) $a_1=2, a_n=32, s_n=187;$ určete *n, d*
b) $a_1=0, d=3, s_n=165;$ určete *n*
c) $a_4=0, a_6=-4, s_n=12;$ určete *n*

13. Číslo 55 rozložte na součet několika čísel tak, aby každé následující bylo o 4 větší než předcházející a poslední bylo 19.

14. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Délka odvěsny má délku 24 cm. Určete délky zbývajících stran.

15. Teploty Země přibývá směrem do jejího středu o 1°C na 33 m. Jaká je teplota na dně dolu 1015 m hlubokého, je-li v hloubce 25 m teplota 9°C?

16. Napište prvních pět členů geometrické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, je-li dáno:
a) $a_1=-1, a_2=2$
b) $a_1=16, q=\frac{1}{2}$
c) $a_3=4\sqrt{3}, a_4=-8\sqrt{3}$
d) $a_3=8, a_6=64$
e) $a_2-a_1=15, a_3-a_2=60$
f) $a_1+a_2-a_4=-110, a_2+a_3-a_5=-220$
g) $a_8-a_4=360, a_7-a_5=144$

17. V geometrické posloupnosti je dáno:
a) $a_1=2, q=3, s_n=80;$ určete *n*
b) $a_4=9a_2, s_4=80;$ určete *a₁, q*
c) $a_1=5, a_n=640, s_n=1275;$ určete *q, n*

18. Tři čísla, která tvoří následující členy aritmetické posloupnosti, mají součet 60 a součin 7500. Určete tato čísla.

19. V aritmetické posloupnosti známe $a_1=18, d=-5$. Určete $n\in\mathbb{N}$ tak, aby platilo: $a_n+a_{n+3}=-189$.

20. V geometrické posloupnosti známe $a_1=\frac{1}{64}, q=2.$ Určete $n\in\mathbb{N}$ tak, aby platilo: $a_n+a_{2n}=8200$.

21. V aritmetické posloupnosti je $a_1=3, d=4.$ Kolik členů této posloupnosti musíme sečíst, aby součet byl větší než 250?

22. V geometrické posloupnosti s $q=2$ vypočítejte, kolik členů dává součet 186, jestliže poslední sčítanec je $a_n = 96$.

23. Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2-9x+8=0$ vložte dvě čísla tak, aby spolu s vypočtenými kořeny vznikly čtyři za sebou jdoucí členy geometrické posloupnosti.

24. Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n+1}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-n^4}{5n^4-3n^2+3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-n^3}{5n^4+2n-1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(3n-2)}{(1-n)(2+n)}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{2n^2-3}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}+\frac{2n-n^2}{2n^2}\right)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^5+1}{2n^5+3n}\right)^4$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{(3n-1)^2}$

25. Vypočítejte:

a) $1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\ldots$

b) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3+\ldots$

c) $(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})^3+\ldots$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{2-n}$

g) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\ldots$

h) $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{24}+\frac{1}{48}-\ldots$

i) $5.\sqrt{5}.\sqrt[4]{5}.\sqrt[8]{5}\ldots.$

j) $2.\sqrt{2}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[8]{2}\ldots.$

26. Zjistěte, pro která $x\in\mathbb{R}$ je daná řada konvergentní, a potom součet určete:

a) $1+(2-x)+(2-x)^2+(2-x)^3+\ldots$

b) $1+(x+3)+(x+3)^2+(x+3)^3+\ldots$

c) $2+4x+8x^2+16x^3+\ldots$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^2+7)^n$

27. V $\mathbb{R}$ řešte rovnice:

a) $1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}+\frac{16}{x^4}+\ldots=\frac{4x-3}{3x-4}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{x}\right)^{n-1}=\frac{8}{x+10}$

c) $27=2.(3^x+3^{x-1}+3^{x-2}+...)$

d) $x.\sqrt{x^3}.\sqrt[4]{x^3}.\sqrt[8]{x^4}....=16$

e) $\log x+\log\sqrt{x}+\log\sqrt[4]{x}+...=2$

f) $2^x+4^x+8^x+16^x+...=1$

g) $(x+1).\sum_{n=1}^{\infty}(x+2)^{2n}=\frac{1}{3}$

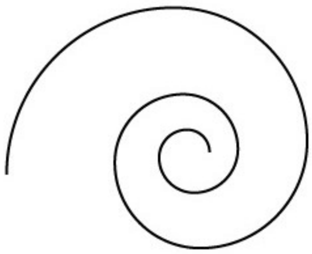
h) $\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{12}{x^3}-...=\frac{x}{x+4}$

28. Užitím součtu geometrické řady vyjádřete zlomkem v základním tvaru:

a) $0,\overline{3}$ b) $0,2\overline{4}$ c) $1,0\overline{32}$

d) $25,6\overline{7}$ e) $\frac{0,4\overline{6}}{0,\overline{63}}$ f) $0,\overline{6}-0,6$

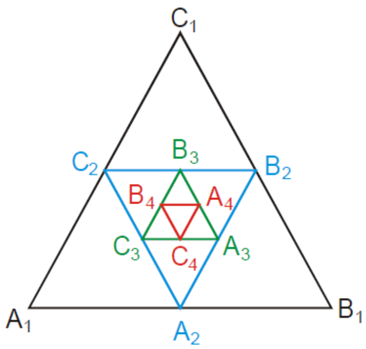
29. Spirála se skládá z polokružnic, z nichž první má poloměr 10 cm a každá následující má poloměr rovný dvěma třetinám poloměru předcházející polokružnice. Určete délku spirály.



30. Spirála se skládá z polokružnic, poloměr první kružnice je 6 cm, poloměr každé další polokružnice je třikrát menší než poloměr polokružnice předcházející. Vypočítejte délku spirály.

31. Do rovnostranného trojúhelníku $A_1B_1C_1$ o délce strany 4 cm je vepsán druhý trojúhelník $A_2B_2C_2$ jehož vrcholy leží ve středech stran trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Podobným způsobem je do trojúhelníku a vepsán trojúhelník $A_2B_2C_2$, do trojúhelníku $A_3B_3C_3$ trojúhelník $A_4B_4C_4$ a tak dále až do nekonečna. Určete:

a) součet obvodů
b) součet obsahů
všech takto vzniklých trojúhelníků.



32. Do čtverce $ABCD$ o délce strany 1 je vepsán čtverec $A_1B_1C_1D_1$ tak, že A_1, B_1, C_1, D_1 jsou postupně středy stran AB, BC, CD, DA; obdobně vepíšeme čtverec $A_2B_2C_2D_2$ do čtverce $A_1B_1C_1D_1$ atd. Vypočtěte součet obvodů a součet obsahů všech takových čtverců.